



Geometriske Operationer i Plan og Rum

Markvorsen, Steen

Publication date:
2009

Document Version
Early version, also known as pre-print

[Link back to DTU Orbit](#)

Citation (APA):
Markvorsen, S. (2009). *Geometriske Operationer i Plan og Rum*.

General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal

If you believe that this document breaches copyright please contact us providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.

GEOMETRISKE OPERATIONER I PLAN OG RUM

STEEN MARKVORSEN

DTU MATEMATIK

Indhold

1	Trekanten	7
1.1	Det sædvanlige koordinatsystem i planen	8
1.2	Trekanten	10
1.2.1	Arealet af en plan trekant	11
1.2.2	De indre vinkler i en plan trekant	13
1.2.3	Orientering af en plan trekant	13
1.3	Areal versus omkreds	14
2	2D Matrix-operationer	17
2.1	Algebraisk opsætning	17
2.2	Geometrisk tolkning	19
2.2.1	Hele trekanten deformeres	19
2.2.2	Rotationer	20
2.2.3	Skaleringer i koordinatakseretningerne	21
2.2.4	Flip	21
2.3	Hovedsætning for 2D (deformations-)matricer	22
2.4	Hvordan dekomponeres en matrix?	23
2.5	Deformations-energi	25
3	Tetraedre	27
3.1	Det sædvanlige koordinatsystem i rummet	27
3.1.1	Tetraedre	28
3.2	Arealet af trekanten i rummet	29
3.3	Rumfang af tetraedre	32
3.4	Orientering af tetraeder ved valg af treben	33
3.5	Rumfang versus overfladeareal	33
4	3D Matrix-operationer	35
4.1	Geometrisk tolkning af 3D matrix-operationer	36
4.1.1	Hele tetraederet deformeres	37
4.1.2	Skaleringer i akseretningerne	37
4.1.3	Flip	37
4.1.4	Rotationer i 3D rummet	38

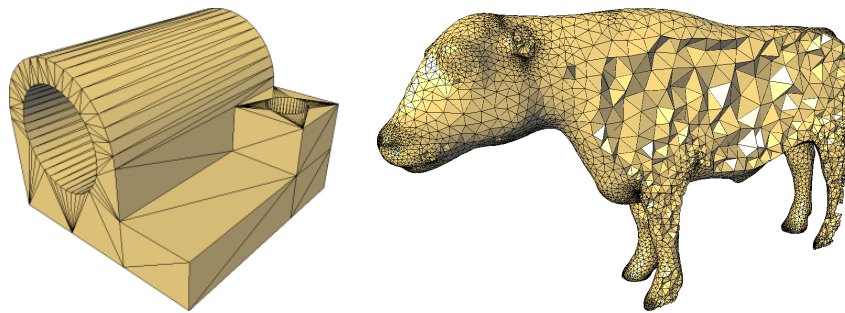
4.2	Hovedsætningen for 3D (deformations-)matricer	39
4.3	Konstruktion af tetraedre, energi	43
5	Deformation af generelle tetraedre	45
5.1	Bestemmelse af deformationsmatrix og flytningsvektor	45
5.2	Markerede og u-markerede tetraedre	49
5.3	Deformation af trekanter i rummet	49
6	Geometrisk dynamik i 2D	55
6.1	Tidsparametriserede plane kurver	55
6.2	Samtidig bevægelse og deformation af trekant	56
6.3	Det medfølgende hængsel	59
6.4	Sweeping	60
7	Geometrisk dynamik i 3D	65
7.1	Samtidig bevægelse og deformation af tetraeder	66
7.2	Differentiation af tidsafhængig rotationsmatrix	68
7.3	Skævsymmetriske matricer	70
7.3.1	Akse-vektorer og akse-matricer	71
7.4	Tidsafhængige rotationsmatricer	73
7.4.1	Rotationer med given akse-vektor-funktion	74
7.5	Outlook	78
8	Styring	81
8.1	Kurver med enhedsfart	81
8.2	Lodret tetraeder transport	84
8.3	Frenet-Serret styring af basistetraeder	86
8.3.1	Krumning	87
8.3.2	Frenet-Serret trebenet er veldefineret	88
8.3.3	Torsion	90
8.3.4	Opsamling	92
9	Medfølgende tetraederrum	95
9.1	Koordinat- og basis-skift	95
9.2	Hastighedsfelt	99
9.2.1	Øjeblikkelig parallelforskydning	101
9.2.2	Øjeblikkelig skrue-bevægelse	102
10	Formning via 'sweeping'	107
10.1	Kurver	107
10.2	Længde af en kurve	108
10.3	Rumlige områder	109
10.4	'Sweeping' med trekanter	112
10.5	Rumfang	113

<i>INDHOLD</i>	5
A Areal-beregninger	117
B Frenet–Serret fra generel parametrisering	121
C Rettelser og implementeringsdatoer	123

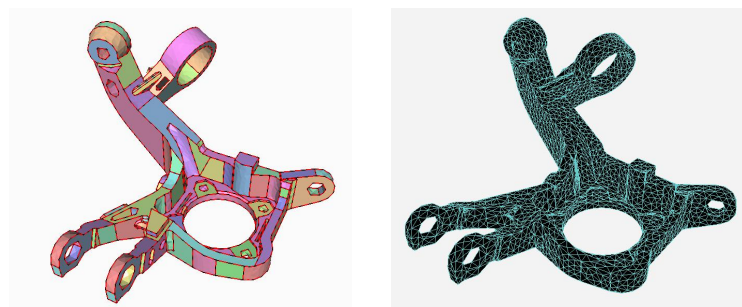
Kapitel 1

Trekanten

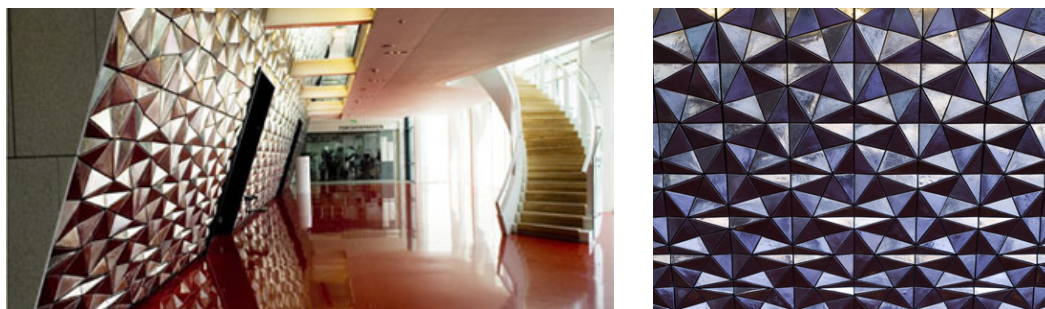
Trekanten er nogle af de mest grundlæggende - og mest anvendte - geometriske objekter, se figurene. Men hvad er en trekant egentlig? Vi ser først på trekanten i planen. Dertil har vi brug for et koordinatsystem.



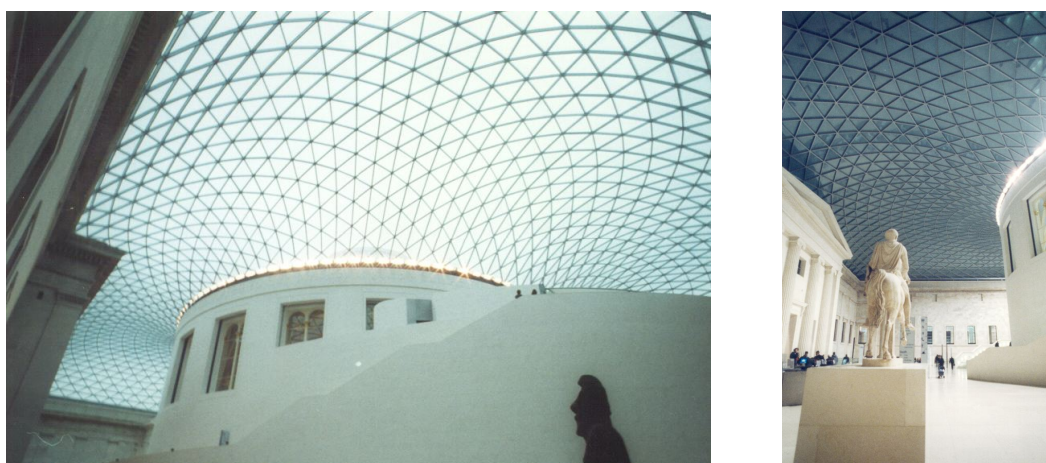
Figur 1.1: Trekanten en masse.



Figur 1.2: Et maskin-element og en tilhørende triangulering.



Figur 1.3: Værk af Olafur Eliasson ved indgangen til koncertsalen på Alsion: *Music Wall*.



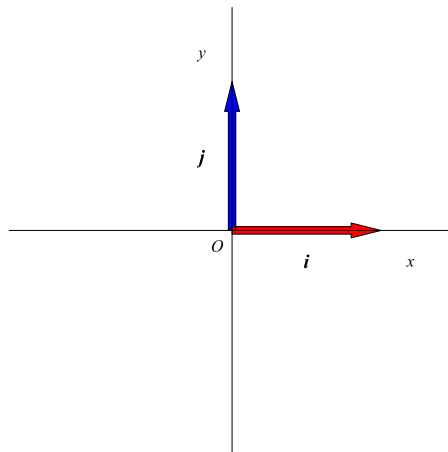
Figur 1.4: Dag og nat i *British Museum Great Court*.

1.1 Det sædvanlige koordinatsystem i planen

Koordinatsystemet i planen er nagelfast og givet ved de sædvanlige retvinklede **koordinataks** ud fra et givet fast punkt, som vi kalder **Origo**, samt de tilhørende **basisvektorer**, som er enhedsvektorer i aksernes retninger: $\{O, x, y\}$, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$. Se figur 1.5.

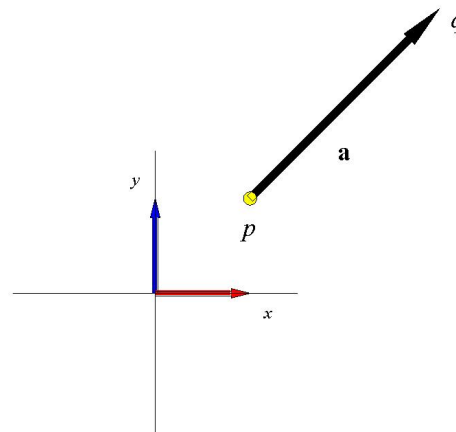
Med et fast valgt koordinatsystem kan vi nu beskrive præcist hvor et punkt p i planen er placeret, nemlig ved hjælp af punktets to (x, y) –koordinater (p_1, p_2) i det givne koordinatsystem. Og vi kan på samme måde fortælle præcis hvilken vektor \mathbf{a} , der forbinder et punkt $p = (p_1, p_2)$ med et andet punkt $q = (q_1, q_2)$, nemlig ved hjælp af den vektors koordinater med hensyn til den givne sædvanlige basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2) \quad . \quad (1.1)$$



Figur 1.5: Det sædvanlige koordinatsystem $\{O, x, y\}$ i planen med basisvektorer $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$.

Læg mærke til, at en vektor \mathbf{a} altså er en **pil** med et **fodpunkt** (i dette tilfælde p) og et **spidspunkt** (i dette tilfælde q). Spidspunktets koordinater kan beregnes ved at addere fodpunktets koordinater til vektorens koordinater. Og fodpunktets koordinater kan beregnes ved at trække vektorens koordinater fra spidspunktets koordinater. Se figur 1.6.



Figur 1.6: Vektoren $\mathbf{a} = (2, 2)$ med fodpunkt $p = (1, 1)$ og spidspunkt $q = (3, 3)$.

Vi vil ret tit få brug for at skrive vektorer på 'højkant', dvs. som **koordinat-søjle-matricer**. For

at se forskel sætter vi en stjerne på:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2) \\ \mathbf{a}^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad . \quad (1.2)$$

1.2 Trekanter

Som navnet siger er en trekant givet ved sine tre kanter! Men for at være helt præcis: Ved en trekant vil vi forstå det udfyldte område i planen, som er afgrænset af trekantens kanter.

Når vi har et fast valgt koordinatsystem til rådighed i planen, vil vi benytte det til at beskrive trekantene i den plan. Det kan vi gøre på mange måder. Een måde er at angive trekantens tre **hjørnepunkter**, p , q , og r . En anden, som vi for det meste vil benytte her, er at angive eet hjørnepunkt p og de to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} , der har fælles fodpunkt p , men som har de to andre hjørnepunkter i trekanten som spidspunkter. Se figur 1.8.

En trekant, der er beskrevet og fastlagt i planen på den måde vil vi betegne med

$$\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad . \quad (1.3)$$

Bemærk, at for hver trekant er der 3 valgmuligheder for valg af det fælles fodpunkt og for hvert valg af fodpunkt er der dernæst to muligheder for at vælge *rækkefølgen* af de to **kantvektorer** \mathbf{a} og \mathbf{b} . Det vil sige, at en given trekant kan skrives på formen (1.3) på 6 forskellige måder.

OPGAVE 1.1. Vi ser på den trekant, der er givet ved de tre punkter, der i planen har følgende koordinater med hensyn til det valgte sædvanlige retvinklede koordinatsystem:

$$p = (1, 1) \quad , \quad q = (2, 3) \quad , \quad r = (3, 2) \quad . \quad (1.4)$$

Find alle 6 muligheder for at skrive den trekant på formen (1.3). Vink: Een af mulighederne er

$$\triangle = \triangle((3, 2), (-2, -1), (-1, 1)) \quad . \quad (1.5)$$

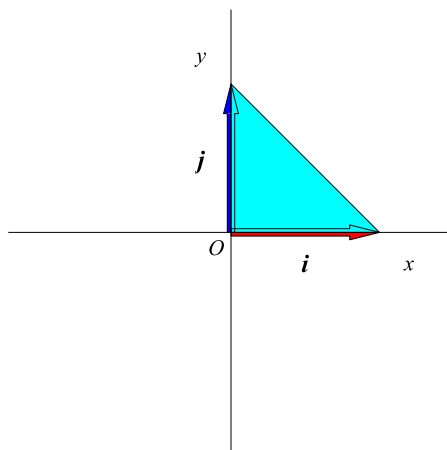
En meget speciel trekant er **basistrekanten** med de tre hjørnepunkter $(0, 0)$, $(1, 0)$, og $(0, 1)$, se figur 1.7.

OPGAVE 1.2. Find alle 6 muligheder for at skrive basistrekanten på formen (1.3). Vink: Een af dem er

$$\triangle = \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) = \triangle((0, 0), (1, 0), (0, 1)) \quad . \quad (1.6)$$

OPGAVE 1.3. Find alle 5 alternative muligheder for at skrive den trekant, der er vist i figur 1.8 på formen (1.3). Trekanten er allerede 'vist' på formen:

$$\triangle = \triangle((1, 1), (2, 2), (-2, 1)) \quad . \quad (1.7)$$



Figur 1.7: Basistrekanten i planen.

Man kan med nogen ret spørge: Hvorfor alt det bøvl med 6 forskellige måder at skrive en og samme trekant på, når vi kan nøjes med een måde, nemlig den der bare angiver en liste med de tre hjørnepunkter?

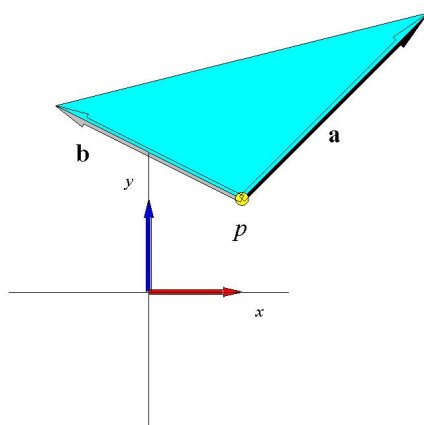
Det er fordi **vinklerne** i trekanten, **arealet** af trekanten, og **orienteringen** af trekanten ligger 'indbygget' i kant-vektorerne og kan let bestemmes direkte ud fra dem. Det vil vi nu præcisere og give eksempler på.

1.2.1 Arealet af en plan trekant

Arealet af en trekant er som bekendt halvdelen af grundlinjen gange højden. For en trekant $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ kan vi vælge længden $\|\mathbf{a}\|$ af \mathbf{a} som grundlinje. Og højden i trekanten er

$$\|\mathbf{b}\| \sin(\theta) = |(\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}}) / \|\hat{\mathbf{a}}\|| \quad , \quad (1.8)$$

hvor θ er vinklen mellem de to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} , og hvor $\hat{\mathbf{a}}$ betegner **tværvektoren** i planen til \mathbf{a} , dvs. i koordinater har vi $\hat{\mathbf{a}} = (-a_2, a_1)$. Derfor er arealet:



Figur 1.8: En trekant i planen givet ved $\triangle = \triangle((1,1), (2,2), (-2,1))$

$$\begin{aligned}
 \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) &= \frac{1}{2} |\mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{a}}| \\
 &= \frac{1}{2} |a_1 b_2 - a_2 b_1| \\
 &= \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \left| \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \right) \right| \\
 &= \frac{1}{2} |\det([\mathbf{a}^* \ \mathbf{b}^*])|.
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Med andre ord: Arealet af trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er den numeriske værdi af den halve determinant af den 2×2 matrix, der fås ved at sætte \mathbf{a} og \mathbf{b} ind som søjler i matricen.

Nu kan der jo forekomme **kollapsede trekanter** med areal 0, og determinant 0 (hvordan?) - men det vil vi helst ikke tillade, så derfor definerer vi:

Definition 1.4. En **regulær trekant** er en trekant, der har et egentligt areal, altså et areal, der er skarpt større end 0.

Sætning 1.5. En trekant er regulær hvis og kun hvis alle trekantens kantlængder og vinkler er positive.

OPGAVE 1.6. Kan du bevise den påstand? Eller er det bare klart?

OPGAVE 1.7. Hvilke af følgende trekanter er regulære?

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= \triangle((1, 1), (4, -2), (8, 4)) \\ \triangle_2 &= \triangle((1, 3), (4, -2), (-8, 4)) \\ \triangle_3 &= \triangle((3, 1), (9, 123), (123, 9)) \\ \triangle_4 &= \triangle(O, \mathbf{j}, \mathbf{i}) \quad .\end{aligned}\tag{1.10}$$

1.2.2 De indre vinkler i en plan trekant

En trekant har en **indre vinkel** ved hvert af sine tre hjørnepunkter. Vinklen (målt i radianer) er en værdi imellem 0 og π og kan findes ved hjælp af de to kant-vektorer, der udgår fra hjørnet. Lad os sige, at vi er interesserede i at bestemme den indre trekantsvinkel ved punktet p i den trekant, der har fremstillingen $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Den vinkel vil vi betegne med $\theta_p = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ og den kan bestemmes ud fra de to kant-vektorer:

$$\cos(\theta_p) = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\tag{1.11}$$

sådan at

$$\theta_p = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|}\right) \quad .\tag{1.12}$$

OPGAVE 1.8. Bestem de indre vinkler i hver af følgende trekanter. Vinklerne skal angives i radianer, altså: 1 radian svarer til $180/\pi$ grader og 1 grad svarer til $\pi/180$ radianer. Alle tallene kan gerne angives med blot et par decimaler. Check, at vinkelsummen i hver trekant er π radianer.

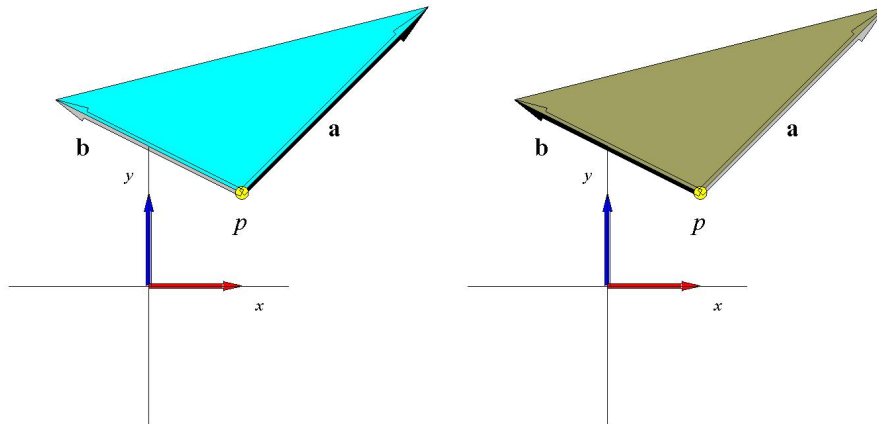
$$\begin{aligned}\triangle_1 &= \triangle((1, 1), (4, -2), (8, 4)) \\ \triangle_2 &= \triangle((1, 3), (4, -2), (-8, 4)) \\ \triangle_4 &= \triangle(O, \mathbf{j}, \mathbf{i}) \quad .\end{aligned}\tag{1.13}$$

1.2.3 Orientering af en plan trekant

Som sikkert bemærket ovenfor ved brug af (1.9) gjorde vi der et stort nummer ud af at tage den numeriske værdi alle steder (for eksempel af determinanten) for at sikre, at arealerne af trekanterne bliver positive. Ved ombytning af *rækkefølgen* af vektorerne i trekanten $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ skifter determinanten fortegn (hvorfor det?). Rækkefølgen har med **orienteringen** af trekanten at gøre:

Definition 1.9. Hvis drejningen om fodpunktet p af \mathbf{a} imod \mathbf{b} er imod uret, så siger vi, at trekanten $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orienteret; ellers siger vi, at den er negativt orienteret.

Med andre ord, hvis $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er positivt orienteret, så er $\triangle(p, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ negativt orienteret. Se figur 1.9 hvor vi med to forskellige farver (cyan og khaki) har angivet de to forskellige orienteringer af en trekant. Hvis den ene kant-vektor i $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ drejes dynamisk omkring p som i figur 1.10 så vil orienteringen af trekanten skifte præcis i de situationer hvor trekanten ikke er regulær.



Figur 1.9: Trekanten $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ fra figur 1.8 har positiv orientering; den tilsvarende (med samme fodpunkt) negativt orienterede version $\triangle(p, \mathbf{b}, \mathbf{a})$ er vist til højre.

OPGAVE 1.10. Bestem areal, orientering, indre vinkler, kantlængder, og omkreds for hver af følgende plane trekanter.

$$\begin{aligned}
 \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\
 \triangle_2 &= \triangle((1, 1), (3, 0), (0, 4)) \\
 \triangle_3 &= \triangle((12, 117), (3, 0), (0, 4)) \\
 \triangle_4 &= \triangle(O, (1, 0), (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3))) \\
 \triangle_5 &= \triangle(O, \mathbf{j}, (3, 4)) \quad .
 \end{aligned}
 \tag{1.14}$$

1.3 Areal versus omkreds

Nogle plane trekanter er federe end andre, dvs. de har større areal per omkreds. Vi vil begynde at undersøge det fænomen med et par eksempler:

Eksempel 1.11. En familie af trekanter er defineret ved, at det ene hjørne bevæger sig på en cirkel med radius 1 og centrum i $(1, 0)$ som vist i figur 1.10. De to andre hjørner er fastholdte og ligger konstant i punkterne $(0, 0)$ og $(2, 0)$ henholdsvis. Vi vil bestemme de største trekanter i familien, altså dem der har det største areal A . Af symmetri Grunde må der være mindst to. Hvorfor det?

Vi kan først bemærke, at cirklen kan *parametriseres* ved hjælp af cosinus og sinus: Vektoren \mathbf{q} fra punktet $(1, 0)$ til et vilkårligt givet punkt på cirklen danner en vinkel θ med x -aksen, dvs. $\angle(\mathbf{i}, \mathbf{q}) = \theta$. Men så kan \mathbf{q} skrives som

$$\mathbf{q} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \quad , \tag{1.15}$$

Figur 1.10: Hvilken trekant har størst areal i forhold til sin omkreds? Det oplyses og ses, at det bevægede hjørne bevæger sig langs en cirkel, se eksempel 1.11.

og dermed er stedvektoren fra $(0,0)$ til det givne punkt på cirklen:

$$\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{q} = (1 + \cos(\theta), \sin(\theta)) \quad . \quad (1.16)$$

Den faste kant-vektor for trekanten er givet ved

$$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} = (2, 0) \quad , \quad (1.17)$$

så vi kan konkludere, at trekantens areal er givet ved

$$\text{Areal}(\theta) = \frac{1}{2} |\det([\mathbf{a}^* \ \mathbf{b}^*])| = \left| \begin{vmatrix} 2 & 1 + \cos(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) \end{vmatrix} \right| \quad , \quad (1.18)$$

hvor vi tillader θ at antage alle vinkel-værdierne, $\theta \in [0, 2\pi]$. Men den determinant er let at udregne:

$$\text{Areal}(\theta) = |\sin(\theta)|. \quad (1.19)$$

Det vil sige, at det største areal opnås, når $|\sin(\theta)|$ er størst, og det opnås for $\theta = \pi/2$ og for $\theta = 3\pi/2$, fordi der og kun der er $|\sin(\theta)|$ præcis 1.

De største trekanter i familien får vi nu ved at indsætte de to fundne θ -værdier i udtrykket (1.16) for \mathbf{b} ovenfor: Den ene trekant er udspændt fra origo $(0,0)$ af $\mathbf{a} = (2,0)$ og $\mathbf{b} = (1,1)$ og den anden trekant er udspændt af $\mathbf{a} = (2,0)$ og $\mathbf{b} = (1,-1)$. De har begge arealet $A(\pi/2) = A(3\pi/2) = 1$.

Figur 1.11: Hvilken trekant har størst areal i forhold til omkreds? Det oplyses, at det bevægede hjørne bevæger sig langs en ellipse med halvakserne 1 og $\sqrt{3}$. Opgaven er formuleret mere præcist i opgave 1.13.

OPGAVE 1.12. En ellipse i planen har ligningen

$$E : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (1.20)$$

hvor a og b er positive tal, de såkaldte halvakser. En sådan ellipse er symmetrisk omkring akserne og har centrum i Origo, $(0, 0)$.

1. Angiv koordinaterne for de to punkter, hvor ellipsen skærer x -aksen?
2. Hvor skærer den y -aksen?

OPGAVE 1.13. En familie af trekanter er defineret som i figur 1.11. Opstillingen er magen til den i figur 1.10 bortset fra, at "styrekurven" for \mathbf{q} nu er en ellipse med centrum i $(1, 0)$ og halvakserne er 1 (i x -akseretningen) og $\sqrt{3}$ (i y -akseretningen). Ellipsens ligning er:

$$E : \left(\frac{x-1}{1}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1, \quad (1.21)$$

1. Begrund, at med den metode, som er gennemgået i eksempel 1.11, kan følgende udtryk nu benyttes for vektoren \mathbf{b} :

$$\mathbf{b} = (1 + \cos(\theta), \sqrt{3} \sin(\theta)) \quad (1.22)$$

dvs. begrund, at alle de punkter, der har sådan en stedvektor, ligger på ellipsen med den givne ligning.

2. Find de trekanter i familien, som har det største areal A . Angiv også det areal.
3. Find de trekanter i familien, som har den største omkreds L . Angiv også den omkreds.
4. Find de trekanter i familien, som har det største forhold A/L imellem areal A og omkreds L . Angiv også det forhold.

Kapitel 2

2D Matrix-operationer

I dette kapitel vil vi **deformere plane trekanter** ved hjælp af 2×2 -matricer.

2.1 Algebraisk opsætning

Vi antager, at vi har givet en eller anden vilkårlig matrix, som vi herefter vil kalde en **deformationsmatrix**:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} . \quad (2.1)$$

Dernæst tager vi en trekant, der er givet på hængsel-formen $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ som indført i kapitel 1.

Vi vil så deformere hængslet og dermed trekanten til et nyt hængsel, en ny trekant, med det samme hjørnepunkt p , men med nye udspændende kant-vektorer, $\tilde{\mathbf{a}}$ og $\tilde{\mathbf{b}}$, men hvordan? Det vil vi nu beskrive:

Den nye trekant kan skrives som $\triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$, hvor $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2)$ og $\tilde{\mathbf{b}} = (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2)$ konstrueres ved hjælp af \mathbf{K} og de givne kant-vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ på følgende måde:

De nye kant-vektorer til konstruktion af det deformerede hængsel defineres ved at gange matricen \mathbf{K} på hver af koordinatsøjlerne for de to kant-vektorer ud fra p i det gamle hængsel:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}a_1 + k_{12}a_2 \\ k_{21}a_1 + k_{22}a_2 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

og tilsvarende fås $\tilde{\mathbf{b}}$ fra \mathbf{b} :

$$\begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}b_1 + k_{12}b_2 \\ k_{21}b_1 + k_{22}b_2 \end{bmatrix} . \quad (2.3)$$

De to definitions-ligninger kan samles til een matrix-ligning:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

På kort form har vi altså, som en alternativ måde at skrive (2.2) og (2.3):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}^* &= \mathbf{K} \mathbf{a}^* \\ \tilde{\mathbf{b}}^* &= \mathbf{K} \mathbf{b}^* \end{aligned} \quad (2.5)$$

eller på endnu kortere, kompakt matrix form for ligning (2.4):

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Eksempel 2.1. For trekanten $\triangle = \triangle(O, (2, 1), (1, 2))$ og deformationsmatricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

får vi

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad , \quad (2.8)$$

sådan at den deformerede trekant er givet ved: $\tilde{\triangle} = \triangle(O, (8, 4), (7, 5))$.

OPGAVE 2.2. Lad \mathbf{K} betegne de nedenfor angivne deformationsmatricer og bestem i hvert tilfælde deformationerne af de angivne trekanter:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & \triangle_2 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \triangle_3 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} & \triangle_4 &= \triangle((2, 1), (1, 2), (2, 4)) \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} & \triangle_5 &= \triangle((2, 1), (1, 2), (2, -4)) \end{aligned} \quad (2.9)$$

OPGAVE 2.3. Find i hver enkelt tilfælde nedenfor den deformationsmatrix \mathbf{K}_i , som deformerer den givne trekant \triangle_i over i den givne trekant $\tilde{\triangle}_i$

$$\begin{aligned} \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad , \quad \tilde{\triangle}_1 = \triangle(O, (2, 1), (-1, 2)) \\ \triangle_2 &= \triangle(O, (2, 1), (-1, 2)) \quad , \quad \tilde{\triangle}_2 = \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ \triangle_3 &= \triangle(O, (2, 1), (-1, 2)) \quad , \quad \tilde{\triangle}_3 = \triangle(O, (-1, 2), (2, 1)) \end{aligned} \quad (2.10)$$

OPGAVE 2.4. Find i hvert enkelt tilfælde den deformerede trekant $\tilde{\Delta}$ når den givne trekant Δ deformeres først med \mathbf{K}_1 og dernæst den nye trekant med \mathbf{K}_2 osv.

$$\begin{aligned}\Delta_a &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_b &= \Delta(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 3/4 & -1/4 \end{bmatrix} \\ \Delta_c &= \Delta(O, (2,1), (2,2)) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\ \Delta_d &= \Delta(O, (2,1), (2,2)) \quad , \quad \mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .\end{aligned}\tag{2.11}$$

2.2 Geometrisk tolkning

Hvad betyder ovenstående i geometrisk forstand? Hvordan ser disse deformationer faktisk ud? Og hvordan afhænger deformationerne af \mathbf{K} og af de kant-vektorer vi starter med?

Deformationsmatricen \mathbf{K} kan betragtes som en **maskine**, der drejer, trækker og strækker i et hængsel og giver et nyt hængsel, en ny trekant.

Det første vi kan se umiddelbart er, at arealet af den nye trekant er givet ved arealet af den gamle trekant ganget med den numeriske værd af determinanten af deformationsmatricen:

Sætning 2.5.

$$\text{Areal}(\Delta(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})) = |\det(\mathbf{K})| \text{Areal}(\Delta(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) \quad .\tag{2.12}$$

Specielt fås, at den deformerede trekant er regulær hvis og kun hvis den gamle er regulær (dvs. har areal > 0) og deformationsmatricen \mathbf{K} også er regulær (altså $\det(\mathbf{K}) \neq 0$).

Bevis. Aflæses direkte af ligning (2.6) sammenholdt med arealformlen (1.9). □

Eksempel 2.6. I fortsættelse af eksempel 2.1: Den gamle trekant Δ har arealet 3, og da determinanten af \mathbf{K} er 4, så har den nye trekant arealet 12 i henhold til sætning 2.5. Og det stemmer med en direkte udregning af arealet af den nye trekant.

2.2.1 Hele trekanten deformeres

Vi har indirekte antaget, at det er tilstrækkeligt at definere hvordan en trekants hængsel - dvs. de to kant-vektorer ud fra det fælles hjørnepunkt p - deformeres. Men kan vi være sikre på, at hele trekanten selv 'følger med' ved deformationen?

Vi vil kort indse, at det faktisk *er* tilfældet, som forventet, altså at der gælder følgende:

Sætning 2.7. Hvis \mathbf{w} er en vektor med fodpunkt p og spidspunkt inde i den trekant, der er repræsenteret ved hængslet $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, så er $\widetilde{\mathbf{w}}$ også en vektor, der har fodpunkt p og spidspunkt inde i den deformerede trekant $\triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$, når $\widetilde{\mathbf{w}}$ defineres (på samme måde som $\widetilde{\mathbf{a}}$ og $\widetilde{\mathbf{b}}$) ved

$$\widetilde{\mathbf{w}}^* = \mathbf{K} \mathbf{w}^* \quad . \quad (2.13)$$

Bevis. Deformation med en matrix er en **lineær afbildning**. Hvis \mathbf{w} som angivet har spidspunkt inde i den regulære trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, så kan \mathbf{w} skrives som en (og kun en) linear-kombination af de to lineært uafhængige vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} : Der findes to entydigt givne værdier $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$ med $\alpha + \beta \leq 1$ (overvej disse uligheder! Hvor kommer de fra?) sådan at

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad . \quad (2.14)$$

Derfor er også

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{w}}^* &= \mathbf{K} \mathbf{w}^* = \mathbf{K}(\alpha \mathbf{a}^* + \beta \mathbf{b}^*) \\ &= \mathbf{K}(\alpha \mathbf{a}^*) + \mathbf{K}(\beta \mathbf{b}^*) \\ &= \alpha \mathbf{K} \mathbf{a}^* + \beta \mathbf{K} \mathbf{b}^* \\ &= \alpha \widetilde{\mathbf{a}}^* + \beta \widetilde{\mathbf{b}}^* \quad , \end{aligned} \quad (2.15)$$

sådan at $\widetilde{\mathbf{w}}$ er en tilsvarende (med de samme koefficienter $\alpha \geq 0$ og $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$) linearkombination af det nye hængsels kant-vektorer $\widetilde{\mathbf{a}}$ og $\widetilde{\mathbf{b}}$. Spidspunktet af vektoren $\widetilde{\mathbf{w}}$ med forpunktet p ligger derfor i trekanten $\triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$, og det var det, vi skulle vise. \square

Det giver herefter mening at bruge en notation, der direkte fortæller, at trekanten $\widetilde{\triangle} = \triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}})$ fås ved for eksempel at bruge deformationsmatricen \mathbf{K} på trekanten $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$, idet begge trekanter repræsenteres ved de respektive hængsler:

$$\widetilde{\triangle} = \triangle(p, \widetilde{\mathbf{a}}, \widetilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{K} \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad . \quad (2.16)$$

2.2.2 Rotationer

Rotationsmatricer er specielle typer af deformationsmatricer. Alle 2D rotationsmatricer har følgende struktur - de er givet ved en rotations-vinkel φ således: og har formen:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_U) & -\sin(\varphi_U) \\ \sin(\varphi_U) & \cos(\varphi_U) \end{bmatrix} \quad , \quad (2.17)$$

hvor φ_U er en vinkel i intervallet $[-\pi, \pi]$. Hvis $\varphi_U > 0$ så roterer \mathbf{U} vektorer i positiv omløbsretning, altså imod uret; hvis $\varphi_U < 0$ så roterer \mathbf{U} vektorer i negativ omløbsretning, altså med uret.

I figur 2.1 vises rotation af hængsel med rotationsvinkel $\varphi = t \in [-\pi, \pi]$.

Figur 2.1: Rotation af hængsel. Animeret.

2.2.3 Skaleringer i koordinatakse-retningerne

Skaleringsmatricerne for skalering i henholdsvis x –akse-retning og i y –akse-retning er, med de respektive skaleringskonstanter σ_1 og σ_2 :

$$\mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.18)$$

og

$$\mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.19)$$

Bemærk, at vi kan udføre begge skaleringer på een gang ved:

$$\mathbf{S}_{xy}(\sigma_1, \sigma_2) = \mathbf{S}_x(\sigma_1) \mathbf{S}_y(\sigma_2) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.20)$$

Se animationerne af de to typer skaleringer i figurerne 2.2 og 2.3.

OPGAVE 2.8. Vis, at $\mathbf{S}_x(\sigma_1) \mathbf{S}_y(\sigma_2) = \mathbf{S}_y(\sigma_2) \mathbf{S}_x(\sigma_1)$.

2.2.4 Flip

Flipmatricen \mathbf{F} er simpelthen:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \quad (2.21)$$

OPGAVE 2.9. Hvorfor kan vi tillade os at kalde denne matrix \mathbf{F} en **flipmatrix** når vi betragter den som en deformationsmatrix, der 'ganges på' hængsler og trekanter?

Figur 2.2: Skalering af hængsel i x -akse-retning med faktorer $\sigma_1 \in [1, 3]$. Animeret.

Figur 2.3: Skalering af hængsel i y -akse-retning med faktorer $\sigma_2 \in [-1, 1]$. Animeret.

2.3 Hovedsætning for 2D (deformations-)matricer

Der gælder et fantastisk resultat om alle matricer, som vi foreløbig vil nøjes med at formulere her for regulære 2×2 -matricer - for at få en første fornemmelse af, hvad det hele går ud på:

Sætning 2.10. *Enhver regulær (deformations-)matrix \mathbf{K} kan skrives som et produkt af 4 matricer således:*

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F} \quad , \quad (2.22)$$

hvor \mathbf{U} og \mathbf{V} er rotationsmatricer, $\mathbf{\Sigma}$ er en entydig bestemt diagonalmatrix med positive diagonalelementer, og \mathbf{F} er enten flip-matricen (hvis $\det(\mathbf{K}) < 0$) eller enhedsmatricen (hvis $\det(\mathbf{K}) > 0$):

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_U) & -\sin(\varphi_U) \\ \sin(\varphi_U) & \cos(\varphi_U) \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \varphi_U \in [-\pi, \pi] \quad , \quad (2.23)$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \quad \text{hvor} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 > 0 \quad , \quad (2.24)$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_V) & -\sin(\varphi_V) \\ \sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{bmatrix} \quad \text{hvor } \varphi_V \in [-\pi, \pi] \quad , \quad (2.25)$$

sådan at den transponerede rotationsmatrix ser således ud

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_V) & \sin(\varphi_V) \\ -\sin(\varphi_V) & \cos(\varphi_V) \end{bmatrix} \quad , \quad (2.26)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{hvis } \det(\mathbf{K}) < 0 \quad , \quad (2.27)$$

og

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{hvis } \det(\mathbf{K}) > 0 \quad . \quad (2.28)$$

Bemærkning 2.11. Der er et par observationer, som følger af denne sætning, og som det er værd at lægge mærke til:

1. Den transponerede rotationsmatrix \mathbf{V}^* , som skal bruges i produktet (2.22), er selv en rotationsmatrix, den roterer samme vinkel som \mathbf{V} , bare i modsat retning. De to matricer er hinandens inverse: $\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{E}$ sådan at $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$.
2. Hvis $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ og $\det(\mathbf{K}) > 0$, så er \mathbf{K} selv en rotationsmatrix.

OPGAVE 2.12. Vis, at \mathbf{V}^* er en rotationsmatrix, som defineret i (2.21), og at $\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}$.

2.4 Hvordan dekomponeres en matrix?

Der er to oplagte spørgsmål: Hvordan viser man sådan en sætning og hvordan bruger man den? Det sidste spørgsmål (som vi indtil videre vil nøjes med at besvare, men som næsten også er et argument for sætningen) handler om at kunne finde faktorerne, ingredienserne, \mathbf{F} , \mathbf{V}^* , $\mathbf{\Sigma}$, og \mathbf{U} i ovenstående ligning (2.22), når matricen \mathbf{K} er givet.

Det er ikke vanskeligt; metoden hedder **Singular Value Decomposition** eller kort **SVD**, og benyttes i utallige anvendelser, se [S].

- \mathbf{F} fås direkte ved blot at finde ud af, om $\det(\mathbf{K})$ er positiv eller negativ og så bruge (2.28) henholdsvis (2.27).
- $\mathbf{\Sigma}$ fås ud fra egenverdierne for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$. (Hvorfor er det produkt en symmetrisk matrix?) De egenverdier er altid positive (hvorfor det?) - så man kan altid tage kvadratroden af hver af dem, og disse kvadratrødder er σ_1 og σ_2 .
- Søjlerne i \mathbf{V} er de til σ_1^2 og σ_2^2 svarende ortogonale enheds-egenvektorer \mathbf{v}_1 og \mathbf{v}_2 for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^*\mathbf{K}$. Egenvektorerne skal vælges sådan at \mathbf{V} har positiv determinant (det er altid muligt, eventuelt ved at skifte fortegn på een af egenvektorerne):

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1^* \quad \mathbf{v}_2^*] \quad (2.29)$$

- Søjlerne i \mathbf{U} er de vektorer \mathbf{u}_1 og \mathbf{u}_2 , som fås direkte ved at udregne

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sigma_1} (\mathbf{K}\mathbf{F}) \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sigma_2} (\mathbf{K}\mathbf{F}) \mathbf{v}_2^*\end{aligned}\tag{2.30}$$

og indsætte disse vektorer som søjler:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_2^* \end{bmatrix} \quad .\tag{2.31}$$

Vi illustrerer med et eksempel:

Eksempel 2.13. Vi har givet matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad .\tag{2.32}$$

Vi vil finde dekompositionen af \mathbf{K} som et produkt af 4 matricer som i (2.22).

Determinanten af \mathbf{K} er positiv, så $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, enhedsmatricen. Desuden er

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad ,\tag{2.33}$$

som har egenverdierne $\sigma_1^2 = 8$ og $\sigma_2^2 = 2$ og tilhørende ortogonale enheds-egenvektorer $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ og $\mathbf{v}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$, således at vi med den rækkefølge og det valg af fortegn på egenvektorerne får

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}\tag{2.34}$$

og den *transponerede* \mathbf{V} :

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \sin(\pi/4) \\ -\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} \quad .\tag{2.35}$$

Det ses, at \mathbf{V} (den tilsvarende ikke-transponerede matrix) selv er en rotationsmatrix med $\varphi_V = \pi/4$.

Søjlerne i \mathbf{U} er til sidst i henhold til forskriften ovenfor:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,\end{aligned}\tag{2.36}$$

som betyder, at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

som igen klart er en rotationsmatrix, nemlig med $\phi_U = 0$.

Vi kan for en ordens skyld lige checke, at faktoriseringen er korrekt ved at regne efter:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F} &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{U} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \quad . \end{aligned} \quad (2.38)$$

OPGAVE 2.14. Dekomponér følgende matricer på samme måde som i eksempel 2.13 og husk at prøve efter til sidst, om produktet af de 4 matricer giver den ønskede \mathbf{K} -matrix:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_3 &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_5 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

2.5 Deformations-energi

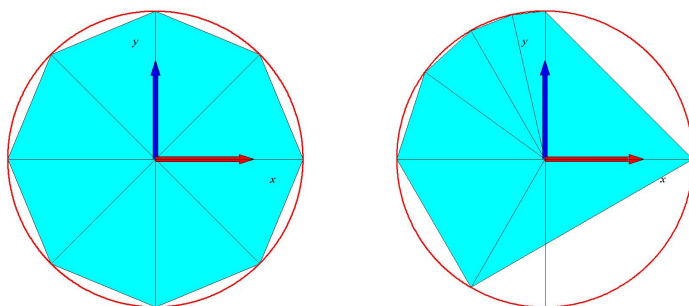
Vi forestiller os en **fabrik**, der omdanner basis-trekanter $\triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$ til deformerede trekanter efter vilkårlige ønskede deformations-matricer \mathbf{K} . Basistrekantene haves på lager en masse og er gratis! Men hvad koster deformationerne? Fabrikken har maskiner, der kan rotere, skalere i akseretningerne, og vende trekanterne (med \mathbf{F}) med fastholdt basispunkt O .

Det er kun skaleringerne der ikke er gratis:

Definition 2.15. *Prisen på hver enkelt deformeret trekant (dvs. et mål for den **energi** det koster at deformere et standard hængsel med deformationsmatricen \mathbf{K}) er bestemt ved σ -værdierne for \mathbf{K} , altså $\sigma_1 = \sigma_1(\mathbf{K})$ og $\sigma_2 = \sigma_2(\mathbf{K})$ således:*

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1(\mathbf{K}))^2 + (1 - \sigma_2(\mathbf{K}))^2 \quad . \quad (2.40)$$

OPGAVE 2.16. Hvad koster det fabrikken at producere trekanterne til fliselægningen i cirkelskiven til venstre i figur 2.4?



Figur 2.4: Trianguleringer af (dele af) en cirkelskive med ligebenede trekanter.

OPGAVE 2.17. Hvad koster det fabrikken at producere trekanterne til fliselægningen vist til højre i figur 2.4? Det oplyses, at delepunkterne på den omskrevne cirkel der er givet ved

$$q_i = (1.5 \cos(\theta_i), 1.5 \sin(\theta_i)) \quad \text{hvor} \quad \theta_i \in \{0, 4\pi/3, \pi, 4\pi/5, 2\pi/3, 4\pi/7, \pi/2\} \quad . \quad (2.41)$$

OPGAVE 2.18. Antag, at vi har en stak ens trekanter, som ikke er basis-trekanter, men givet ved $\triangle = \triangle(O, (1, 1), (2, 1))$ og ønsker dem lavet om til nye trekanter $\triangle = \triangle(O, (1, -1), (2, 1))$. Hvordan kan vi benytte fabrikkens maskiner til det, og hvad er prisen for hver trekant?

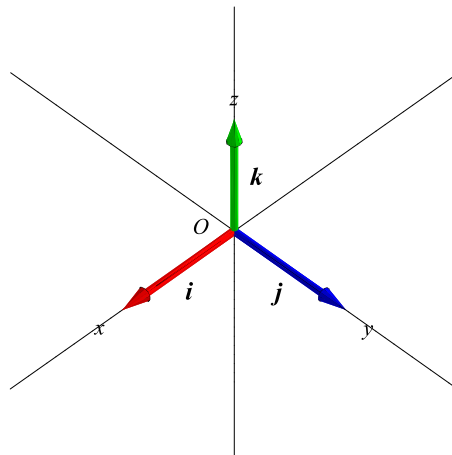
Kapitel 3

Tetraedre

Tetraedre er de objekter, der i 3D svarer til trekantene i 2D. Ligesom en trekant, der er udspændt af et hængsel, et to-ben, som er bestemt ved to vektorer med et fælles fodpunkt, så er et tetraeder udspændt af et tre-ben, altså tre vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , og \mathbf{c} med et fælles fodpunkt.

3.1 Det sædvanlige koordinatsystem i rummet

For effektivt at kunne beskrive hvad der foregår i rummet, og for præcist at kunne analysere treben og tetraedre etc. har vi brug for et 3D koordinatsystem. **Koordinatsystemet i rummet** er givet ved et fast valg af sædvanlige retvinklede koordinataksler ud fra et givet fast Origo, samt de tilhørende basisvektorer i akse-retningerne: $\{O, x, y, z\}$, $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$. Se figur 3.1.



Figur 3.1: Det sædvanlige koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$ i rummet med basisvektorer $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Ligesom i planen kan vi nu præcisere beliggenhed af punkter og forbindelsesvektorer mellem

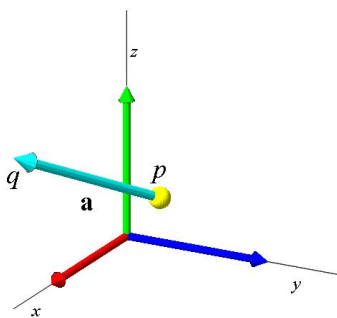
punkter. Hvis punktet p har koordinaterne $p = (p_1, p_2, p_3)$ og punktet q har koordinaterne $q = (q_1, q_2, q_3)$, så har vi dermed også koordinaterne for den vektor \mathbf{a} , der forbinder p med q :

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3) \quad . \quad (3.1)$$

Vektoren \mathbf{a} kan betragtes som en **pil** (nu i rummet) med **fodpunkt** p og **spidspunkt** q , se figur 3.2.

I kapitel 4 vil vi se nærmere på 3×3 -matrix-deformationer i rummet og har derfor ligesom i kapitel 2 brug for at repræsentere vektorer ved deres **koordinat-søjle-matricer**:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ \mathbf{a}^* &= \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (3.2)$$



Figur 3.2: Vektoren $\mathbf{a} = (1.0, -0.5, 0.5)$ med fodpunkt $p = (0.5, 0.5, 0.5)$ og spidspunkt $q = (1.5, 0.0, 1.0)$

3.1.1 Tetraedre

Tetraedre vil vi som allerede nævnt beskrive ved hjælp af **treben**. Et treben består af et punkt p og tre kantvektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , og \mathbf{c} med det fælles fodpunkt p , se figur 3.4. Et sådant treben vil vi betegne på denne måde:

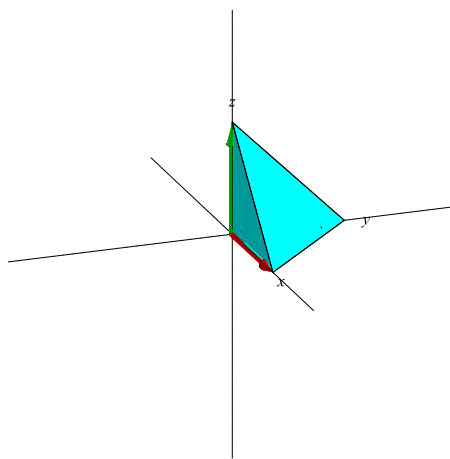
$$\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (3.3)$$

Et specielt tetraeder er basis-tetraederet, se figur 3.3:

$$\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad . \quad (3.4)$$

For at være præcis (som for trekanter i planen): Ved et tetraeder vil vi forstå det rumlige område, der er afgrænset af de 4 trekanter, som er udspændt af det valgte trebens toppunkt og de 3 spidspunkter. Læg mærke til, at de tre spidspunkter selv udspænder den ene af de 4 trekanter. Se figurene 3.4 og 3.3.

For et givet tetraeder er der altså 4 mulige valg af toppunkter til et udspændende treben og for hvert af de 4 valg af toppunkt er der dernæst 6 muligheder for at vælge rækkefølgen af de tre kantvektorer, der udgår fra det valgte toppunkt. Det vil sige, at et givet tetraeder kan skrives på formen (3.3) på ialt 24 måder.



Figur 3.3: Basistetraederet i rummet $\boxtimes(p, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

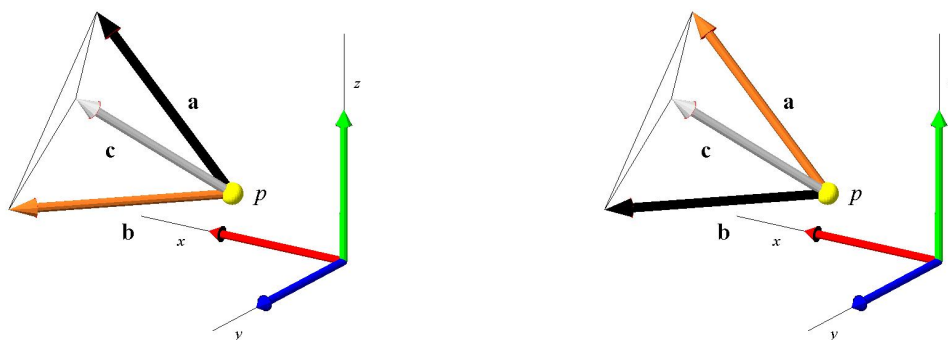
3.2 Arealet af trekanter i rummet

Vi er egentlig mest interesseret i at finde **rumfang** af tetraedre, se næste afsnit nedenfor. Tetraedre er **pyramider** og derfor er deres rumfang en tredjedel af grundfladens areal gange højden.

For et helt generelt tetraeder $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ kan vi som grundflade vælge den trekant, der er udspændt af \mathbf{a} og \mathbf{b} , altså den trekant, der givet ved hængslet $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Læg mærke til, at det hængsel og den trekant er fuldstændig veldefineret - selvom der nu er tale om en **trekant i rummet** som ikke nødvendigvis ligger i (x, y) -planen.

For at bestemme det ovennævnte grundfladeareal for tetraederet får vi altså først brug for at bestemme arealet af den trekant der er udspændt af hængslet $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ i rummet.

Til den ende vil vi bruge **krydsproduktet** af de to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} :



Figur 3.4: To treben, begge med fodpunkt $p = (0.5, 0.5, 0.5)$ og kantvektorerne $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$, og $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$. Trebenet til venstre er $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ og det til højre er $\triangle(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$. Farvekoden følger rækkefølgen af de indgående kant-vektorer: Sort for førstnævnte, chokoladefarvet for nummer to, og grå for sidstnævnte kant-vektor.

Definition 3.1. Krydsproduktet af $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ defineres som den vektor der har koordinaterne:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \quad . \quad (3.5)$$

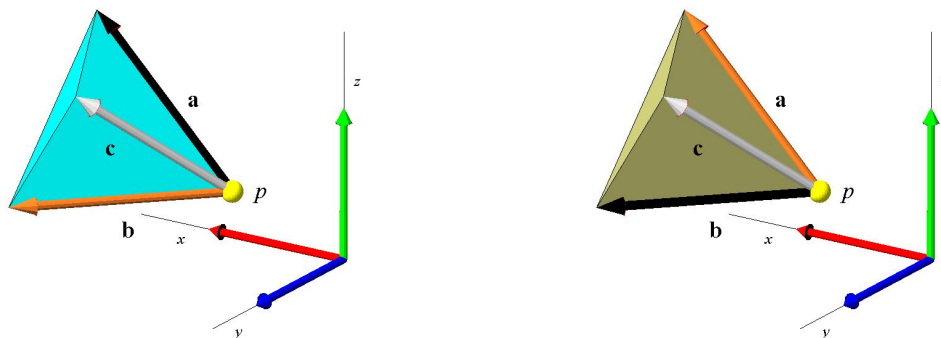
OPGAVE 3.2. Vis direkte ud fra definitionen i den ligning (3.5), at der for vilkårligt givne vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} gælder

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står vinkelret på \mathbf{a} , og $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står vinkelret på \mathbf{b} ; altså: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} = 0$ og $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$
2. $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}$
3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ hvis og kun hvis der enten gælder at mindst en af de to vektorer \mathbf{a} eller \mathbf{b} er $\mathbf{0}$ eller at de to vektorer er proportionale. Det sker netop aldrig i en regulær trekant $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Krydsproduktet giver arealet således:

Sætning 3.3. Arealet af en rumlig trekant $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ er givet ved:

$$\text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| \quad . \quad (3.6)$$



Figur 3.5: Tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ med $p = (0.5, 0.5, 0.5)$, $\mathbf{a} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$, og $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$ som i figur 3.4. Til venstre vises det tilsvarende negativt orienterede tetraeder $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c})$. Den eneste forskel er den rækkefølge kantvektorerne optræder med i det udpændende treben, jvf. Kapitel 1.

Bevis.

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\
 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2(1 - \cos^2(\theta)) \\
 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2\sin^2(\theta) \\
 &= (2 \text{Areal}(\triangle))^2,
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

hvor vi har benyttet (igen) at trekantens areal er grundlinje $\|\mathbf{a}\|$ gange højde $\|\mathbf{b}\| \sin(\theta)$ (hvor θ er vinklen mellem de to vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b}).

□

OPGAVE 3.4. Bestem arealet af hver af følgende trekanter i rummet:

$$\begin{aligned}
 \triangle_1 &= \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}) \\
 \triangle_2 &= \triangle((1, 0, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0)) \\
 \triangle_3 &= \triangle((1, 2, 3), (4, 1, 2), (8, 2, -4)) \\
 \triangle_4 &= \triangle(O, (4, 1, 2), (8, 2, 4)) \\
 \triangle_5 &= \triangle((-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (-1, 1, 0))
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

3.3 Rumfang af tetraedre

Som ovenfor nævnt er rumfanget af et tetraeder en tredjedel af grundfladens areal gange højden. Arealet af grundfladen, $\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$ har vi bestemt i (3.6) for tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Højden kan vi dernæst bestemme som skalarproduktet af den sidste kant-vektor \mathbf{c} med en enhedsvektor, som står vinkelret på grundtrekanten.

Men $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ står netop vinkelret på grundtrekanten (fordi krydsproduktet er vinkelret på grundtrekantens kant-vektorer), så den kan vi bruge:

$$\begin{aligned} \text{Rumfang}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \left| \frac{1}{3} \text{Areal}(\triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})) \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} \right| \\ &= \frac{1}{6} |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| \end{aligned} \quad (3.9)$$

hvor vi har benyttet (3.6).

Definition 3.5. Rumproduktet $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ af tre vektorer $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, og $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ defineres ved:

$$\begin{aligned} \text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} \\ &= (c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1)) \\ &= \det \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \right) \\ &= \det([\mathbf{a}^* \mathbf{b}^* \mathbf{c}^*]) \quad . \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ved at sammenholde dette med (3.9) har vi nu rumfanget af et tetraeder skrevet kort på 'determinant-form':

Sætning 3.6. Rumfanget af tetraederet $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er:

$$\text{Rumfang}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) = \frac{1}{6} |\det([\mathbf{a}^* \mathbf{b}^* \mathbf{c}^*])| \quad . \quad (3.11)$$

Et tetraeder har rumfang 0, er kollapsed, netop når determinanten i (3.11) er 0, og det forekommer præcis når een af vektorerne kan skrives som en linearkombination af de to andre (hvorfor det?).

Definition 3.7. Et *regulært tetraeder* er et tetraeder, der har et egentligt rumfang, altså et rumfang, der er skarpt større end 0.

3.4 Orientering af tetraeder ved valg af treben

Definition 3.8. Et tetraeder, som er givet ved et treben $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er positivt orienteret hvis rumproduktet $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ i (3.10) er positivt; hvis rumproduktet $\text{Rum}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ er negativt, siges tetraederet at være negativt orienteret. Læg mærke til, at rumproduktet er en determinant som netop skifter fortegn når to af søjlerne ombyttes, hvilket svarer til en ombytning i rækkefølgen af kant-vektorerne i $\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

I figurerne 3.5 og 3.3 er orienteringen af de givne tetraedre markeret ved farven på de afgrænsende trekanter: De 4 trekanter, som afgrænser tetraederet er cyan-farvede, hvis tetraederet er positivt orienteret, og ellers khaki-farvede.

OPGAVE 3.9. Bestem rumfang, regularitet, og orientering for hver af følgende tetraedre.

$$\begin{aligned}\boxtimes_1 &= \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes((1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)) \\ \boxtimes_3 &= \boxtimes((1, 1, 4), (-1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)) \quad .\end{aligned}\tag{3.12}$$

3.5 Rumfang versus overfladeareal

Nogle tetraedre er federe end andre, sammenlign med afsnit 1.3 i kapitel 1. Det skal igen her forstås sådan at nogle tetraedre har større rumfang per totale overfladeareal end andre.

Vi har ovenfor beregnet rumfanget af et vilkårligt tetraeder, og da overfladearealet simpelthen er summen af arealerne af de 4 trekanter, der afgrænser tetraederet, kan vi nu beregne forskellige tilfælde.

OPGAVE 3.10. Bestem forholdet Rumfang / Areal mellem rumfang og *totale* overfladeareal for hvert af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned}\boxtimes_1 &= \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, 2\mathbf{k}) \\ \boxtimes_3 &= \boxtimes(O, 2\mathbf{i}, \mathbf{j}, 2\mathbf{k}) \\ \boxtimes_4 &= \boxtimes(O, 2\mathbf{i}, 2\mathbf{j}, 2\mathbf{k}) \\ \boxtimes_5 &= \boxtimes((1, 0, 0), (\cos(2\pi/3), \sin(2\pi/3), 0), (\cos(2\pi/3), -\sin(2\pi/3), 0), (0, 0, 1)) \quad .\end{aligned}\tag{3.13}$$

OPGAVE 3.11. Bestem forholdet Rumfang / Areal mellem rumfang og *totale* overfladeareal for hvert af følgende tetraedre, hvor u er en positiv reel variabel, således at Rumfang / Areal derved bliver en funktion af $u \geq 0$.

$$\boxtimes = \boxtimes((1, 0, 0), (\cos(\pi/3), \sin(\pi/3), 0), (\cos(\pi/3), -\sin(\pi/3), 0), (0, 0, u)) \quad .\tag{3.14}$$

Bestem den værdi af u for hvilken Rumfang / Areal er størst mulig.

Kapitel 4

3D Matrix-operationer

Matrixdeformationer af tetraedre og af rumlige trekanter foregår på helt samme måde som i planen. Vi antager, at vi har givet en vilkårlig matrix \mathbf{K} , som nu er en 3×3 -matrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} . \quad (4.1)$$

Denne matrix 'virker' på en rumlig vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ og giver en billedvektor $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3)$ på sædvanlig måde ved matrixprodukt med \mathbf{a} -vektorens koordinatsøjlematrix \mathbf{a}^* :

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 \\ \tilde{a}_2 \\ \tilde{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} , \quad (4.2)$$

eller på kompakt form:

$$\tilde{\mathbf{a}}^* = \mathbf{K} \mathbf{a}^* . \quad (4.3)$$

Rumlige trekanter deformeres tilsvarende med \mathbf{K} ved at lade \mathbf{K} virke på begge kantvektorerne i et af de hængsler, der repræsenterer trekanten, $\triangle = \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b})$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 \\ \tilde{a}_3 & \tilde{b}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} , \quad (4.4)$$

eller på kompakt form:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* \end{bmatrix} . \quad (4.5)$$

Den deformerede trekant er altså givet ved hængslet $\triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}})$, og vi vil igen, når det ikke kan misforstås, skrive

$$\tilde{\triangle} = \triangle(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}) = \mathbf{K} \triangle(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}) . \quad (4.6)$$

Tetraedre deformeres selvsagt tilsvarende ved at lade \mathbf{K} virke på de tre kantvektorer i et repræsenterende treben $\boxtimes = \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$:

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{b}_1 & \tilde{c}_1 \\ \tilde{a}_2 & \tilde{b}_2 & \tilde{c}_2 \\ \tilde{a}_3 & \tilde{b}_3 & \tilde{c}_3 \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} . \quad (4.7)$$

På kompakt form:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}^* & \tilde{\mathbf{b}}^* & \tilde{\mathbf{c}}^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{b}^* & \mathbf{c}^* \end{bmatrix} . \quad (4.8)$$

Det deformerede tetraeder er givet ved trebenet $\boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})$, og vi skriver

$$\tilde{\boxtimes} = \boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}}) = \mathbf{K} \boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) . \quad (4.9)$$



Figur 4.1: Tetraeder og et udspændende treben.

4.1 Geometrisk tolkning af 3D matrix-operationer

Et oplagt resultat, som vi direkte aflæser fra 4.8 eller 4.7 er, at rumfanget af et deformeret tetraeder er lig med den numeriske værdi af determinanten af den matrix, der deformerer, ganget med rumfanget af det gamle tetraeder.

Det afgørende er, at rumfanget af et tetraeder jo essentielt netop er (pånær faktoren 1/6) determinanten af den matrix hvis søjler netop er de tre kantvektorens koordinatsøjlematricer.

Sætning 4.1.

$$\text{Rumfang}(\boxtimes(p, \tilde{\mathbf{a}}, \tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{c}})) = |\det(\mathbf{K})| \text{Rumfang}(\boxtimes(p, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})) . \quad (4.10)$$

Dette generaliserer altså direkte den tilsvarende sætning om arealet af plane trekanten, se 2.5.

4.1.1 Hele tetraederet deformeres

Som vi allerede har noteret ovenfor ($\tilde{\boxtimes} = \mathbf{K}\boxtimes$), så følger hele tetraederet med ved deformationen af det udspændende treben. Strengt taget bør vi overveje dette på samme måde som vi gjorde for plane trekanter, men argumentet er præcis det samme, og handler om at bruge lineariteten af den afbildning, der svarer til at lade \mathbf{K} virke på vektorerne inde i tetraederet.

OPGAVE 4.2. Gennemfør det argument, der viser, at hvis \mathbf{K} afbilder kantvektorer i kantvektorer, så afbildes hele det rumlige udspændte tetraeder også i det rumlige udspændte tetraeder.

4.1.2 Skaleringer i akseretningerne

De egentligt deformerende matricer er klart dem, der strækker og trækker eller skubber og komprimerer tetraederne. Ligesom i kapitel 2 er ideen her at isolere disse matricer som skaleringsmatricer der udelukkende virker i akseretningerne. Det vil vi gøre ved hjælp af en SVD dekomposition af en given matrix, sådan at 'resten' af faktorerne 'kun' roterer tetraederne i rummet.

Med andre ord: Vi får brug for følgende specielle deformationsmatricer (bemærk, at de nu er 3×3 -matricer):

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_x(\sigma_1) &= \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_y(\sigma_2) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{S}_z(\sigma_3) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (4.11)$$

En samtidig skalering i alle akseretningerne med skaleringskonstanterne σ_1 , σ_2 , og σ_3 fås naturligvis med matricen

$$\mathbf{S}_{xyz}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \mathbf{S}_z(\sigma_3)\mathbf{S}_y(\sigma_2)\mathbf{S}_x(\sigma_1) = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

4.1.3 Flip

Med henblik på at kunne præcisere at en given \mathbf{K} -matrix skifter orientering på et givet tetraeder, vil vi igen bruge en flip-matrix:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (4.13)$$

Bemærk specielt, at ligesom 2×2 -flipmatricen har også denne 3×3 version determinanten

$$\det(\mathbf{F}) = -1 \quad . \quad (4.14)$$

OPGAVE 4.3. Diskuter igen rimeligheden af den betegnelse. Find andre alternative muligheder for simple flip-matricer.

4.1.4 Rotationer i 3D rummet

Rotationer i rummet er generelt ret komplicerede at forholde sig til. Men hvis vi kan rotere givne vinkler om koordinataksene, så kan vi konstruere en hvilken som helst rotationsmatrix. Hvad er en rotationsmatrix?

Definition 4.4. En 3×3 -rotationsmatrix \mathbf{R} er en matrix, der opfylder de to egenskaber:

$$\det(\mathbf{R}) = 1 \quad (4.15)$$

og

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^* \quad (\text{som er ækvivalent med } \mathbf{R}^* \mathbf{R} = \mathbf{E}) \quad , \quad (4.16)$$

hvor \mathbf{E} betegner enhedsmatricen af type 3×3 .

Nogle rotationer er særligt simple - akserotationerne. De er repræsenterede ved følgende matricer, og drejer de angivne vinkler, henholdsvis u , v og w , om de angivne akser, henholdsvis x -aksen, y -aksen, og z -aksen.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x(u) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(u) & -\sin(u) \\ 0 & \sin(u) & \cos(u) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_y(v) &= \begin{bmatrix} \cos(v) & 0 & -\sin(v) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(v) & 0 & \cos(v) \end{bmatrix} \\ \mathbf{R}_z(w) &= \begin{bmatrix} \cos(w) & -\sin(w) & 0 \\ \sin(w) & \cos(w) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (4.17)$$

OPGAVE 4.5. Vis ved direkte udregninger, at de tre akserotationsmatricer virkelig er rotationsmatricer som defineret i definition 4.4.

OPGAVE 4.6. Find billedvektorerne ved brug af de angivne rotationsmatricer \mathbf{K}_i på hver af de angivne vektorer \mathbf{a} , \mathbf{b} , og \mathbf{c}

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_2 &= \mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 1, 1), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_3 &= \mathbf{R}_z(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 1, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_4 &= \mathbf{R}_y(\pi/4)\mathbf{R}_x(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1) \\ \mathbf{K}_5 &= \mathbf{R}_x(\pi/4)\mathbf{R}_y(\pi/4) \quad , \quad \mathbf{a} = (1, 0, 0), \mathbf{b} = (0, 1, 0), \mathbf{c} = (0, 0, 1)\end{aligned}\tag{4.18}$$

Sammensætning af rotationer om koordinataksene med givne drejningsvinkler u , v , og w om henholdsvis x -aksen, y -aksen, og z -aksen fås ved at finde matrixproduktet af de tre tilsvarende rotationsmatricer. Her er det helt generelle udtryk for det matrixprodukt for alle værdier af u , v og w :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(u, v, w) &= \mathbf{R}_z(w)\mathbf{R}_y(v)\mathbf{R}_x(u) \\ &= \begin{bmatrix} \cos(w)\cos(v) & -\sin(w)\cos(u) - \cos(w)\sin(v)\sin(u) & \sin(w)\sin(u) - \cos(w)\sin(v)\cos(u) \\ \sin(w)\cos(v) & \cos(w)\cos(u) - \sin(w)\sin(v)\sin(u) & -\cos(w)\sin(u) - \sin(w)\sin(v)\cos(u) \\ \sin(v) & \cos(v)\sin(u) & \cos(v)\cos(u) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Der gælder nu følgende behagelige sætning:

Sætning 4.7. Enhver rotationsmatrix \mathbf{R} kan skrives på formen $\mathbf{R}(u, v, w)$, dvs. virkningen af enhver rotationsmatrix kan repræsenteres ved tre på hinanden følgende rotationer om koordinataksene. Med andre ord: For enhver given rotationsmatrix \mathbf{R} findes der vinkelværdier u , v , og w således at

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}(u, v, w) = \mathbf{R}_z(w)\mathbf{R}_y(v)\mathbf{R}_x(u) \quad .\tag{4.19}$$

Når \mathbf{R} er givet (med sine matrix-elementer r_{ij}), er det heller ikke svært at finde disse akserotationsvinkler. Som det fremgår af matrixproduktet ovenfor er f.eks. $\sin(v) = r_{31}$ sådan at $v = \arcsin(r_{31})$ eller $v = \pi - \arcsin(r_{31})$, og $\cos(w)\cos(v) = r_{11}$ sådan at $w = \arccos(r_{11}/\cos(v))$ eller $v = -\arccos(r_{31}/\cos(v))$.

OPGAVE 4.8. Vis, at hvis $v = \pi/2$ eller $v = -\pi/2$, så er der mange værdier af u og w som giver den samme $\mathbf{R}(u, v, w)$. Det vil sige, at vinkelværdierne ikke i alle tilfælde er entydigt bestemte.

4.2 Hovedsætningen for 3D (deformations-)matricer

Ligesom for 2×2 -matricer gælder der for 3×3 -matricer, at de kan dekomponeres i et produkt af 4 standard deformationsmatricer:

Sætning 4.9. Enhver regulær 3×3 –(deformations-)matrix \mathbf{K} kan skrives som et produkt af 4 matricer således:

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F} \quad , \quad (4.20)$$

hvor \mathbf{U} og \mathbf{V} er 3×3 –rotationsmatricer, $\mathbf{\Sigma}$ er en entydigt bestemt diagonalmatrix med positive diagonalelementer, altså en akseskaleringsmatrix:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvor} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0 \quad , \quad (4.21)$$

og \mathbf{F} er flip-matricen (hvis $\det \mathbf{K} < 0$) eller enhedsmatricen (hvis $\det \mathbf{K} > 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvis} \quad \det \mathbf{K} < 0 \quad , \\ \mathbf{F} = \mathbf{E} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{hvis} \quad \det \mathbf{K} > 0 \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

Da både \mathbf{U} , \mathbf{V} , og \mathbf{V}^* er rotationsmatricer kan de selv dekomponeres. Hver af rotationsmatricerne kan faktoriseres i 3 basisrotationer om koordinataakserne. Specielt for de to rotationsmatricer \mathbf{U} og \mathbf{V}^* har vi

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{R}_z(w_U) \mathbf{R}_y(v_U) \mathbf{R}_x(u_U) \\ \mathbf{V}^* &= \mathbf{R}_z(w_{V^*}) \mathbf{R}_y(v_{V^*}) \mathbf{R}_x(u_{V^*}) \end{aligned} \quad (4.23)$$

for passende værdier af drejningsvinkler u_U, v_U, w_U og $u_{V^*}, v_{V^*}, w_{V^*}$.

Det er dog især deformationsfaktoren $\mathbf{\Sigma}$ vi er interesserede i, fordi det er skaleringerne i akseretningerne, der egentlig deformerer geometrien af de objekter vi 'bruger' matricen \mathbf{K} på, se opgaverne nedenfor.

Metoden til at bestemme faktorerne i dekompositionen, **SVD af 3×3 –matricer**, er præcis den samme som for 2×2 –matricer:

- \mathbf{F} fås direkte ved blot at finde ud af, om $\det(\mathbf{K})$ er positiv eller negativ og så bruge (4.22).
- $\mathbf{\Sigma}$ fås ud fra egenverdierne for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$. De egenverdier er altid positive - så man kan altid tage kvadratroden af hver af dem, og disse kvadratrødder er σ_1 , σ_2 , og σ_3 .
- Søjlerne i \mathbf{V} er de til σ_1^2 , σ_2^2 , og σ_3^2 svarende ortogonale enheds-eigenvektorer \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , \mathbf{v}_3 for den symmetriske matrix $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$. Eigenvektorerne skal vælges sådan at \mathbf{V} har positiv determinant (det er altid muligt, eventuelt ved at skifte fortegn på én af eigenvektorerne):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^* & \mathbf{v}_2^* & \mathbf{v}_3^* \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

- Søjlerne i \mathbf{U} er de vektorer \mathbf{u}_1 , \mathbf{u}_2 , og \mathbf{u}_3 som fås direkte ved at udregne

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1^* &= \frac{1}{\sigma_1} (\mathbf{KF}) \mathbf{v}_1^* \\ \mathbf{u}_2^* &= \frac{1}{\sigma_2} (\mathbf{KF}) \mathbf{v}_2^* \\ \mathbf{u}_3^* &= \frac{1}{\sigma_3} (\mathbf{KF}) \mathbf{v}_3^*\end{aligned}\tag{4.25}$$

og indsætte disse vektorer som søjler:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^* & \mathbf{u}_2^* & \mathbf{u}_3^* \end{bmatrix} . \tag{4.26}$$

OPGAVE 4.10. Med hensyn til metodens 3. die punkt vedrørende skift af fortegn på en egenvektor \mathbf{v} med henblik på at opnå en positiv determinant af \mathbf{V} : Vis helt generelt, at hvis \mathbf{v} er en egenvektor med tilhørende egenværdi λ , så er $-\mathbf{v}$ også en egenvektor med den samme tilhørende egenværdi λ .

Vi vil først se på et forholdsvis simpelt eksempel på en total faktorisering af en matrix \mathbf{K} .

Eksempel 4.11. Vi har givet matricen

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} , \tag{4.27}$$

og vil finde faktoriseringssmatricer \mathbf{U} , $\mathbf{\Sigma}$, \mathbf{V}^* , og \mathbf{F} for \mathbf{K} :

Determinanten af \mathbf{K} er $\det \mathbf{K} = 6 > 0$, så $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ = enhedsmatricen af type 3×3 . Vi har også

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Denne matrix har egenværdierne 9, 4, og 1, så de tilsvarende σ_i værdier er $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, og $\sigma_3 = 1$, altså:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{4.29}$$

Matricen $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ har følgende ortogonale enheds-egenvektorer svarende til egenværdierne 9, 4, og 1:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2) \\ \mathbf{v}_2 &= (0, 1, 0) \\ \mathbf{v}_3 &= (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2) .\end{aligned}\tag{4.30}$$

OPGAVE 4.12. Eftersis direkte, at de påstande er rigtige, altså at $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$ har de påståede egenvektorer, og at de tilhørende egenverdier er de nævnte.

Vi har derfor

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

og dermed den transponerede matrix:

$$\mathbf{V}^* = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}. \quad (4.32)$$

Vi mangler så kun at bestemme \mathbf{U} .

I henhold til forskriften får vi søjlerne i rotationsmatricen \mathbf{U} ved

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{u}_3 &= \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3} & -1 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & -\sqrt{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.33)$$

således at

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/4 & -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{6}/4 & 1/2 & -\sqrt{6}/4 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

OPGAVE 4.13. Check ved direkte udregninger, at der i ovenstående eksempel 4.11 gælder

1. De fundne faktorer giver den oprindelige matrix, som påstået, altså: $\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F}$.
2. De tre matricer \mathbf{U} , \mathbf{V} , og \mathbf{V}^* har ortogonale enhedsvektorer som søjler og alle tre matricer har determinant 1.
3. Matricen \mathbf{U} kan skrives som et produkt af 3 akserotationer:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}_z(\pi/3) \mathbf{R}_y(\pi/4) \mathbf{R}_x(0). \quad (4.35)$$

4. Matricen \mathbf{V}^* kan også skrives som et produkt af 3 akserotationer:

$$\mathbf{V}^* = \mathbf{R}_z(0) \mathbf{R}_y(\pi/4) \mathbf{R}_x(0) \quad . \quad (4.36)$$

OPGAVE 4.14. Dekomponér følgende matricer som i eksempel 4.11, idet der også gøres prøve til sidst for at checke, at de 4 faktorer i dekompositionen virkelig giver den ønskede matrix når de ganges sammen i den rigtige rækkefølge.

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(4.37)

$$\mathbf{K}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_5 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_6 = \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

4.3 Konstruktion af tetraedre, energi

Fra kapitel 2 kender vi fabrikken, der kan producere trekanten ud fra basistrekanten til en pris der fastsættes direkte ud fra σ_i værdierne i dekompositionen af den tilhørende deformationsmatrix.

Den samme fabrik producerer også tetraedre - ved at deformere basistetraedre. Og prisen er - ikke overraskende - bestemt ved:

Definition 4.15. *Prisen for at få et basisteraeder deformeret til et tetraeder $\tilde{\boxtimes} = \mathbf{K} \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ (med samme fodpunkt O) er:*

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1)^2 + (1 - \sigma_2)^2 + (1 - \sigma_3)^2 \quad (4.38)$$

hvor σ_i er diagonalelementerne i faktoren $\mathbf{\Sigma}$ for \mathbf{K} , altså kvadratrødderne af egenverdierne for $\mathbf{K}^* \mathbf{K}$.

OPGAVE 4.16. Bestem deformations-prisen for hver af følgende tetraedre:

$$\begin{aligned} \tilde{\boxtimes}_1 &= \boxtimes(O, (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)) \\ \tilde{\boxtimes}_2 &= \boxtimes(O, (2, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 3)) \\ \tilde{\boxtimes}_3 &= \boxtimes(O, (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), (0, 2, 0), (-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})) \\ \tilde{\boxtimes}_4 &= \boxtimes(O, (1, \sqrt{3}, 6), (-4\sqrt{3}, 4, 0), (-3, -3\sqrt{3}, -2)) \\ \tilde{\boxtimes}_5 &= \boxtimes(O, (1, 2, 1), (1, 1, 0), (2, -1, -2)) \\ \tilde{\boxtimes}_6 &= \boxtimes(O, (1, 1, 1), (-1, 3, 2), (-1, 2, 1)) \quad . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Kapitel 5

Deformation af generelle tetraedre

Hvis vi har givet to regulære tetraedre, der er udspændt af hvert sit treben ud fra to givne (eventuelt forskellige) fodpunkter p_1 og p_2 således:

$$\begin{aligned}\boxtimes_1 &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) \quad ,\end{aligned}\tag{5.1}$$

hvordan finder vi så den deformation, der deformerer \boxtimes_1 til \boxtimes_2 , og hvad koster deformationen, altså hvad er σ_i -værdierne for den tilhørende matrix?

5.1 Bestemmelse af deformationsmatrix og flytningsvektor

Det er ikke svært: Vi skal blot bestemme den matrix \mathbf{K} , der afbilder \mathbf{a}_1 i den nye første kantvektor \mathbf{a}_2 , \mathbf{b}_1 i den nye vektor \mathbf{b}_2 , og \mathbf{c}_1 i vektoren \mathbf{c}_2 . Når vi har gjort det har vi dermed (med fodpunkt p_1):

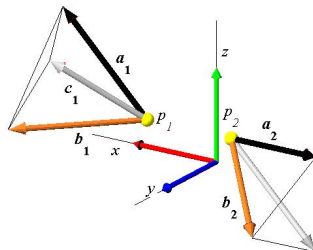
$$\begin{aligned}\tilde{\boxtimes} &= \mathbf{K} \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) \\ &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) \quad .\end{aligned}\tag{5.2}$$

Til sidst parallelforskyder vi hele tetraederet $\boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$ fra fodpunkt p_1 til det ønskede fodpunkt p_2 .

Hvis vi lader \mathbf{k} betegne den vektor, der har fodpunkt p_1 og spidspunkt p_2 , så svarer denne nødvendige parallelforskydning til at addere \mathbf{k} til alle stedvektorerne i tetraederet $\boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$.

Vi kan derfor skrive:

$$\begin{aligned}\boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) &= \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2) + \mathbf{k} \\ &= \mathbf{K} \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1) + \mathbf{k} \quad .\end{aligned}\tag{5.3}$$



Figur 5.1: Et treben før (\boxtimes_1) og efter (\boxtimes_2) deformation.

Vi kan bestemme \mathbf{K} direkte ud fra ligning (4.8) i kapitel 4:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{bmatrix} \quad . \quad (5.4)$$

Begge matricerne $\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{bmatrix}$ og $\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{bmatrix}$ er regulære (med determinant forskellig fra 0). Med de betegnelser har vi så:

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K} \mathbf{K}_1 \quad . \quad (5.5)$$

Vi kan dividere med \mathbf{K}_1 på begge sider af ligningen, dvs. vi ganger igennem med matricen \mathbf{K}_1^{-1} og får derved isoleret den ønskede matrix \mathbf{K} , der deformerer \boxtimes_1 til det nye tetraeder \boxtimes_2 :

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^* & \mathbf{b}_2^* & \mathbf{c}_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^* & \mathbf{b}_1^* & \mathbf{c}_1^* \end{bmatrix}^{-1} \quad . \quad (5.6)$$

Bemærkning 5.1. Læg mærke til, at matricen \mathbf{K}_1 selv er en deformationsmatrix, nemlig den der deformerer basistetraederet $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ til det givne tetraeder \boxtimes_1 (på nær parallelforskydning af fodpunktet), og at matricen \mathbf{K}_2 tilsvarende selv er den deformationsmatrix, der deformerer basistetraederet til det andet givne tetraeder \boxtimes_2 . Deformationsmatricen \mathbf{K} er selv regulær med determinant forskellig fra 0. Hvorfor det?

Deformationsmatricen \mathbf{K} har en SVD-dekomposition i 4 faktorer som udviklet i kapitel 4. Specielt får vi de tre σ_i -værdier for \mathbf{K} som jo er kvadratrødderne af egenværdierne for følgende matrix:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{K} = \left(\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1^{-1} \right)^* \left(\mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1^{-1} \right) \quad . \quad (5.7)$$

Den tidligere omtalte fabrik, der kan deformere basistrekanten og basistetraeder til andre ønskede trekanter i planen og tilsvarende deformere tetraeder i rummet, kan ligeledes håndtere

vilkårligt givne tetraedre \boxtimes_1 som input og deformere dem til ønskede tetraedre \boxtimes_2 som output ved brug af matricen \mathbf{K} som fundet ovenfor.

Prisen er igen givet ved 4.15, hvor \mathbf{K} nu selvsagt er den aktuelle deformationsmatrix, bestemt ovenfor i (5.4), altså $\mathbf{K} = \mathbf{K}_2 \mathbf{K}_1^{-1}$. Bemærk, at rotationer og paralleltransporter er helt gratis, hvilket måske er en anelse urealistisk.

Eksempel 5.2. Vi vil finde prisen på den deformation som deformerer \boxtimes_1 til det nye tetraeder \boxtimes_2 , når de to tetraedre er givet ved:

$$\begin{aligned}\boxtimes_1 &= \boxtimes(O, (1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, -1)) \\ \boxtimes_2 &= \boxtimes(O, (-1, 0, 3\sqrt{2}), (0, 0, 3\sqrt{2}), (-1, \sqrt{2}, -3\sqrt{2}/2))\end{aligned}\quad (5.8)$$

Det gøres via følgende udregninger:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & -3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 3\sqrt{2}/2 & 0 & 3\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}^* \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 13/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/2 & 0 & 13/2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (5.9)$$

$$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = (9, 4, 1) = \text{egenverdierne for } \mathbf{K}^* \mathbf{K}$$

$$P(\mathbf{K}) = (1 - \sigma_1)^2 + (1 - \sigma_2)^2 + (1 - \sigma_3)^2 = 5 \quad .$$

OPGAVE 5.3. Find de deformationsmatricer \mathbf{K} , som i de enkelte tilfælde nedenfor afbilder det givne tetraeder \boxtimes_1 i det andet givne tetraeder \boxtimes_2 , idet det stadig underforstås, at afbildningen er

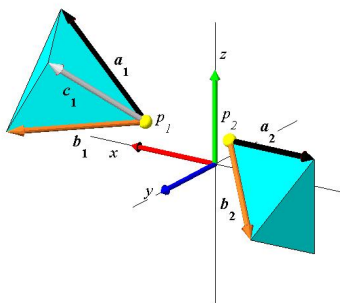
bestemt ved, at det først givne treben afbildes på det andet givne treben.

$$i) \quad \boxtimes_1 = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, (1, 1, 1), (0, 2, -1), (1, 0, 3))$$

$$ii) \quad \boxtimes_1 = \boxtimes(O, (1, 1, 1), (0, 2, -1), (1, 0, 3)) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$$

$$iii) \quad \boxtimes_1 = \boxtimes(O, (3, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 1)) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, (0, 0, 2), (0, 1, 0), (3, 0, 0))$$

$$iv) \quad \boxtimes_1 = \boxtimes(O, (2, 1, 3), (1, -1, 1), (3, 1, 1)) \quad , \quad \boxtimes_2 = \boxtimes(O, (1, 2, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 0))$$



Figur 5.2: Et tetraeder før og efter deformation, \boxtimes_1 og \boxtimes_2 .

OPGAVE 5.4. Find i hvert af tilfældene i opgave 5.3 værdierne af σ_i for hver af de fundne deformationsmatricer, og angiv prisen for de enkelte deformationer.

OPGAVE 5.5. Antag at \boxtimes_1 og \boxtimes_2 er to givne tetraedre med samme fodpunkt for de udspændende hængsler. Hvis \mathbf{K} deformerer \boxtimes_1 til \boxtimes_2 , så deformerer \boxtimes_2 tilbage til \boxtimes_1 med deformationsmatricen \mathbf{K}^{-1} . Hvorfor det?

OPGAVE 5.6. Hvis \mathbf{K} har σ_i -værdierne $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 > 0$, så er σ_i -værdierne for \mathbf{K}^{-1} følgende: $1/\sigma_3 \geq 1/\sigma_2 \geq 1/\sigma_1$. Hvorfor det?

OPGAVE 5.7. Find to eksempler (altså to par af tetraedre \boxtimes_1 og \boxtimes_2), der viser, at prisen på deformation af \boxtimes_1 til \boxtimes_2 ikke nødvendigvis er den samme som prisen på deformationen den anden vej, altså fra \boxtimes_2 til \boxtimes_1 for to givne tetraedre.

OPGAVE 5.8. Fabrikkens direktør vil gerne tilbyde en prissætning, der er symmetrisk, dvs. således at deformation fra \boxtimes_1 til \boxtimes_2 koster det samme (stadig udtrykt ved en anden simpel funktion af σ_1, σ_2 , og σ_3) som den omvendte deformation fra \boxtimes_2 til \boxtimes_1 . Har du et forslag?

5.2 Markerede og u-markerede tetraedre

Både i kapitel 4 og i ovenstående afsnit har tetraedrene \boxtimes_1 og \boxtimes_2 været givet ved et treben, altså f.eks. de tre kant-vektorer $\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1$, og \mathbf{c}_1 ud fra det fælles fodpunkt p_1 , der netop optræder i den anvendte notation $\boxtimes = \boxtimes_1(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$.

Men for et givet tetraeder er der som allerede nævnt flere muligheder for at repræsentere dette tetraeder ved et treben, helt præcist er der 24 muligheder. Der er dels valget af fodpunkt og dels rækkefølgen af kantvektorerne. Hvis vi har valgt et af disse treben til at repræsentere tetraederet, så vil vi sige, at tetraederet er markeret med dette fodpunkt og de valgte kantvektorer. Hidtil har vi kun betragtet **markerede tetraedre**.

For hvert valg af markering (altså udspændende treben) for givne tetraedre \boxtimes_1 og \boxtimes_2 findes en entydig bestemt deformationsmatrix \mathbf{K} med entydigt givne σ_i værdier som vist ovenfor. Men hvilke(t) valg giver den mindste pris?

OPGAVE 5.9. Overvej dette spørgsmål og giv et passende simpelt eksempel der viser, at prisen afhænger af valg af markering (treben) for hver af de to givne tetraedre. Vink: Det er ikke nødvendigt at undersøge alle 24^2 tilfælde af mulige markeringer.

5.3 Deformation af trekanter i rummet

Trekanter i rummet deformeres også ved matrix-operationer. For to givne **markerede trekanter** $\triangle_1 = \triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1)$ og $\triangle_2 = \triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2)$ er der mange matricer, der deformerer den ene over i den anden.

Men vi kan vælge én af dem på en passende smart måde: Vi betragter trekanten \triangle_1 som sideflade i et tetraeder $\boxtimes_1 = \boxtimes(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \mathbf{c}_1)$, hvor det ekstra ben \mathbf{c}_1 simpelthen defineres ved krydsproduktet af de to kantvektorer i den givne trekant:

$$\mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} \quad (5.10)$$

Tilsvarende vil vi betragte trekanten \triangle_2 som sideflade i det tetraeder $\boxtimes_2 = \boxtimes(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \mathbf{c}_2)$, hvor det ekstra ben \mathbf{c}_2 defineres ved:

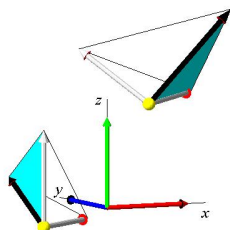
$$\mathbf{c}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} . \quad (5.11)$$

OPGAVE 5.10. Vis, at hvis \triangle_1 og \triangle_2 er regulære, så er de ovenfor konstruerede tetraedre \boxtimes_1 og \boxtimes_2 ligeledes regulære.

Metoderne i afsnit 5.1 benyttes nu til at finde den entydigt bestemte deformationsmatrix \mathbf{K} og en paralleltransport-vektor \mathbf{k} som tilsammen deformerer \boxtimes_1 til \boxtimes_2 , altså den matrix og den vektor der giver

$$\boxtimes_2 = \mathbf{K}\boxtimes_1 + \mathbf{k} \text{ dvs. } ,$$

$$\boxtimes \left(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2, \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} \right) = \mathbf{K} \boxtimes \left(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1, \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} \right) + \mathbf{k} . \quad (5.12)$$



Figur 5.3: To rumlige trekanter er hver for sig hængt op på deres respektive tetraeder-stativer, hvor det tredje ben er det normerede krydsprodukt af hængslets kant-vektorer.

Da de respektive rumlige trekanter \triangle_1 og \triangle_2 er sideflader i de to tetraedre følger de så at sige med tetraederdeformationen og må derfor opfylde den samme identitet med *den samme*

deformationsmatrix \mathbf{K} som tetraederne selv, nemlig (5.12) ovenfor:

$$\begin{aligned}\triangle_2 &= \mathbf{K} \triangle_1 + \mathbf{k}, \quad \text{dvs.} \\ \triangle(p_2, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) &= \mathbf{K} \triangle(p_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + \mathbf{k} \quad .\end{aligned}\tag{5.13}$$

Mindst én af de tre σ_i -værdier for 3×3 -deformationsmatrix \mathbf{K} vil nødvendigvis have værdien 1 når \mathbf{K} konstrueres på denne måde. Hvorfor det? De to andre σ_i -værdier 'hører til' selve trekant-deformationen og bestemmer dermed prisen på den rumlige deformation af \triangle_1 til \triangle_2 .

Eksempel 5.11. Vi betragter to markerede rumlige trekanter \triangle_1 og \triangle_2 og vil finde en 3×3 -deformationsmatrix \mathbf{K} og en parallelforskydningsvektor \mathbf{k} der deformerer \triangle_1 til \triangle_2 . De to trekanter er givet og markeret ved deres respektive hængsler:

$$\begin{aligned}\triangle_1 &= \triangle(O, (1, 1, 1), (1, 0, 1)) \\ \triangle_2 &= \triangle((1, 1, 1), (0, 2, \sqrt{2}), (0, 0, \sqrt{2}))\end{aligned}\tag{5.14}$$

Vi aflæser direkte den nødvendige translationsvektor: $\mathbf{k} = (1, 1, 1)$. For at finde \mathbf{K} beregner vi først de to ekstra ben til tetraeder-ophængen:

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_1 &= \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1}{\|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1\|} = (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2) \\ \mathbf{c}_2 &= \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2}{\|\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2\|} = (1, 0, 0) \quad .\end{aligned}\tag{5.15}$$

Dermed har vi til bestemmelse af den tilhørende 3×3 -deformation \mathbf{K} præcis som i afsnit 5.1:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}^* \mathbf{K} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{5.16}$$

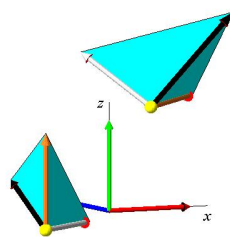
$$(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2) = (4, 1, 1) = \text{egenværdierne for } \mathbf{K}^* \mathbf{K}$$

$$P(\mathbf{K}) = 1 \quad (\text{kun } \sigma\text{-værdien 2 bidrager til prisen}).$$

OPGAVE 5.12. En markeret rumlig trekant \triangle_1 ønskes deformeret til en anden markeret rumlig trekant \triangle_2 . Bestem i hvert af nedenstående tilfælde en 3×3 -deformationsmatrix \mathbf{K} og en parallelforskydningsvektor \mathbf{k} som kan bruges til formålet, idet markeringerne ønskes respekteret:

$$\begin{aligned}i) \quad \triangle_1 &= \triangle(O, (1, 1, 1), (1, 1, -1)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle((0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0)) \\ ii) \quad \triangle_1 &= \triangle(O, (4, 2, 1), (1, 2, 4)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle((7, 2, 7), (1, 0, 1), (0, 1, 0)) \\ iii) \quad \triangle_1 &= \triangle((12, 1, 0), (\sqrt{2}/2, 0, -\sqrt{2}/2), (1, 0, 0)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle(O, \mathbf{i}, \mathbf{k}) \\ iv) \quad \triangle_1 &= \triangle((1, 1, 1), (3, 2, 1), (2, 1, 3)) \quad , \quad \triangle_2 = \triangle(O, (1, 2, 3), (1, 1, 1)) \quad .\end{aligned}\tag{5.17}$$

OPGAVE 5.13. Bestem prisen på hver enkelt af deformationerne i opgave 5.12, idet den oprindelige standardprissætningen P benyttes. Numeriske beregninger med et passende antal decimaler er tilstrækkelige.



Figur 5.4: De to tetraedre udspændt af trebenene i figur 5.3.

Kapitel 6

Geometrisk dynamik i 2D

6.1 Tidsparametriserede plane kurver

Et punkt p der bevæger sig i planen har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det fast valgte koordinatsystem $\{O, x, y\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t)) , t \in I \quad , \quad (6.1)$$

hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet.

Eksempel 6.1. Et meget simpelt eksempel på en sådan bevægelse af et punkt i planen er vist (og animeret) i figur 6.1, hvor

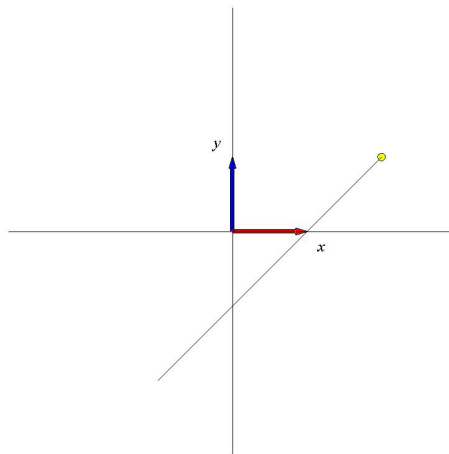
$$p = p(t) = (3t - 1, 3t - 2) , t \in [0, 1] \quad . \quad (6.2)$$

OPGAVE 6.2. En cirkel C i planen er bestemt ved at radius er 3 og centrum ligger i punktet $(2, 1)$. Bestem en tidsparametrisering $p = p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ af cirklen med tilhørende tidsinterval I således at punktet $p(t)$ gennemløber cirklen netop én gang.

Vi kan nu bevæge en markeret trekant i planen således at det valgte hængsel for trekanten har fodpunkt i det bevægede punkt $p(t)$ - for eksempel den simple punkt-bevægelse i eksempel 6.1 og således at hængslets kant-vektorer er givne vektor-funktioner af tiden t .

Eksempel 6.3. Vi vælger fodpunktet $p(t)$ og derudover konstante kantvektorer, henholdsvis $\mathbf{i} = (1, 0)$ og $\mathbf{j} = (0, 1)$, se animationen i figur 6.2. I dette konkrete eksempel er trekanten altså givet ved det tidsafhængige hængsel:

$$\begin{aligned} \Delta(t) &= \Delta(p(t), \mathbf{i}, \mathbf{j}) \\ &= \Delta((3t - 1, 3t - 2), (1, 0), (0, 1)) \quad . \end{aligned} \quad (6.3)$$



Figur 6.1: Bevægelse af punkt langs en ret linje.

6.2 Samtidig bevægelse og deformation af trekant

Eksempel 6.4. Vi bruger den samme bevægelse af fodpunktet $p = p(t)$ som i ovenstående eksempler. Men nu deformerer vi basistrekanten med en **tidsafhængig deformationsmatrix**, der til ethvert givet tidspunkt $t \in [0, 1]$ har nedenstående ret simple SVD-faktorisering. I første omgang antager vi, at faktorerne \mathbf{V} og \mathbf{F} er konstante, nemlig enhedsmatricen: $\mathbf{V} = \mathbf{F} = \mathbf{E}$. (I eksempel 6.7 ser vi på en noget mere generel situation, hvor \mathbf{V} ikke er helt så triviell.)

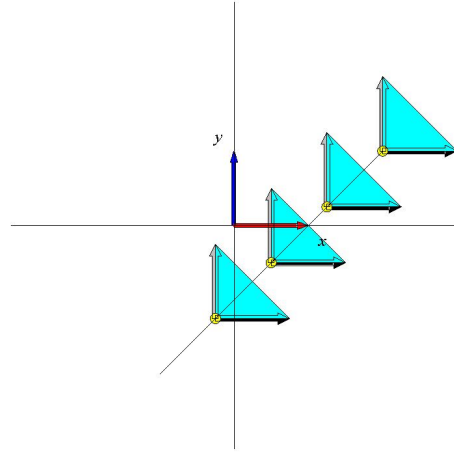
$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1(t) & 0 \\ 0 & \sigma_2(t) \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

hvor

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 2\pi t \\ \sigma_1(t) &= 1 + t \\ \sigma_2(t) &= 1 - \frac{t}{2}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Så er

$$\mathbf{K}(t) = \begin{bmatrix} (1+t)\cos(2\pi t) & -(1-\frac{t}{2})\sin(2\pi t) \\ (1+t)\sin(2\pi t) & (1-\frac{t}{2})\cos(2\pi t) \end{bmatrix}. \quad (6.6)$$



Figur 6.2: Bevægelse af trekant *uden rotation og skalering* 'langs' et linjestykke - det samme som i figur 6.1. Animeret.

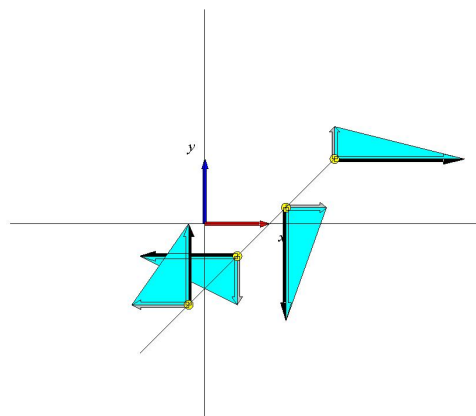
Det vil sige, at det **dynamiske hængsel** til tidspunktet t har fodpunktet $p(t)$ og kantvektorerne $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ bestemt ved:

$$\begin{aligned}\triangle(t) &= \triangle(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) \\ p(t) &= (3t - 1, 3t - 2) \\ \mathbf{a}(t) &= ((1 + t) \cos(2\pi t), (1 + t) \sin(2\pi t)) \\ \mathbf{b}(t) &= \left(-\left(1 - \frac{t}{2}\right) \sin(2\pi t), \left(1 - \frac{t}{2}\right) \cos(2\pi t)\right) \quad .\end{aligned}\tag{6.7}$$

Se animation af hængselbevægelsen og deformationen i figur 6.3. Bemærk ved inspektion af animationen, at begge kantvektorer udfører en hel rotation i løbet af bevægelsen fra det ene endepunkt af linjestykket til det andet, samt at kantvektorerne under hele bevægelsen er vinkelrette på hinanden. Dette følger ligeledes direkte af udtrykkene for $\mathbf{a}(t)$ og $\mathbf{b}(t)$ i (6.7).

OPGAVE 6.5. Bestem arealet $\text{Areal}(\triangle(t))$ af trekanten $\triangle(t)$ fra ovenstående eksempel, dvs. ved hjælp af oplysningerne i (6.7), som funktion af tiden $t \in [0, 1]$.

Eksempel 6.6. I figur 6.4 ses den bevægelse af hængslet som vi opnår, hvis vi undlader at bruge faktoren $\Sigma(t)$ i ovenstående eksempel (eller erstatter $\Sigma(t)$ med \mathbf{E}), dvs. hvis vi benytter rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)$ som deformationsmatrix på basis-trekanten. Derved fås en roterende bevægelse



Figur 6.3: Bevægelse af dynamisk deformeret trekant 'langs' det linjestykke, der er vist i figur 6.1. Animeret. Se eksempel 6.4.

af de vinkelrette enheds-kant-vektorer, nemlig den rotation, som er givet direkte ved rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)$. I dette tilfælde har vi altså:

$$\begin{aligned}\triangle(t) &= \triangle(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t)) \\ p(t) &= (3t - 1, 3t - 2) \\ \mathbf{a}(t) &= (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)) \\ \mathbf{b}(t) &= (-\sin(2\pi t), \cos(2\pi t))\end{aligned}\quad (6.8)$$

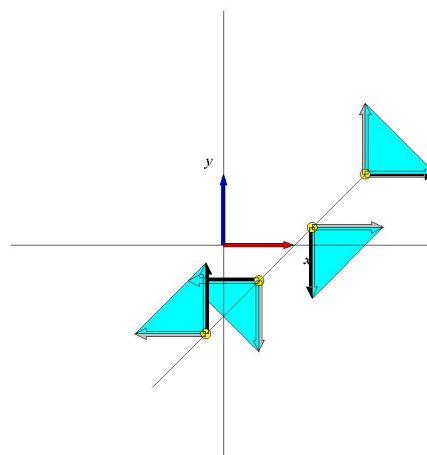
Vi er nu klar til at se på et mere generelt eksempel, hvor $\mathbf{K}(t)$ har 3 SVD faktorer.

Eksempel 6.7. Vi antager, at $\mathbf{K}(t)$ har en ikke-triviel faktor $\mathbf{V}^*(t)$, nemlig følgende tidsafhængige rotationsmatrix:

$$\mathbf{V}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) \end{bmatrix}, \quad (6.9)$$

sådan at $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{\Sigma}(t) \mathbf{V}^*(t)$ for $t \in [0, 1]$, hvor $\mathbf{U}(t)$ og $\mathbf{\Sigma}(t)$ er de samme matricer som brugt i ovenstående eksempel 6.4. Den bevægede og deformerede trekant $\triangle(t) = \mathbf{K}(t) \triangle(p(t), \mathbf{i}, \mathbf{j})$ er animeret i figur 6.5.

OPGAVE 6.8. Bestem arealet $\text{Areal}(\triangle(t))$ af trekanten $\triangle(t) = \mathbf{K}(t) \triangle(p(t), \mathbf{i}, \mathbf{j})$, som betragtes i ovenstående eksempel 6.7, idet arealet udtrykkes som en funktion af tiden $t \in [0, 1]$.



Figur 6.4: Bevægelse af trekant med rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)$ 'langs' linjestykket i figur 6.1. Animeret. Se eksempel 6.6.

6.3 Det medfølgende hængsel

Ligesom i eksempel 6.6 kan vi undersøge den bevægelse af basis-hængslet, som fås ved at benytte rotationsmatricen $\mathbf{U}(t)\mathbf{V}^*(t)$, dvs. uden at skalere med $\mathbf{\Sigma}(t)$ undervejs. Derved fås et **medfølgende hængsel** som det ses på animationen i figur 6.6. Den situation svarer til eksempel 6.6.

Hvis vi forestiller os, at vi følger med i bevægelsen og sidder fast på den trekant, der er udspændt af det medfølgende roterede hængsel, hvordan vil vi så opleve deformationen af det hængsel, der deformerer af $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}^*(t)$? Det er vist i animationen i figur 6.7. Det fornemmes ved inspektion af filmen, at der netop ikke foregår nogen koordineret rotation (af den trekant, der bliver deformeret) set fra det medfølgende hængsel - kun skaleringer - til ethvert givet tidspunkt.

OPGAVE 6.9. Bestem (standard-)prisen $P(t) = P(\triangle(t))$ for hver af de markerede trekanter $\triangle(t)$, $t \in [0, 1]$, fra eksempel 6.7.

OPGAVE 6.10. En kunde beder (den nu velkendte) fabrik om at producere en ordre på 1000 trekanter $\triangle(t_i)$ af den type, der bruges i eksempel 6.7, nemlig én for hver $t_i = i/1000$, $i =$

Figur 6.5: Bevægelse af basis-trekant med $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}^*(t)$ som givet i eksempel 6.7. Animeret.

1, 2, 3, ..., 1000. Direktøren giver et hurtigt tilbud på, hvad det skal koste:

$$P_{\text{total}} = 1000 \int_0^1 P(t) dt \quad , \quad (6.10)$$

hvor $P(t)$ er den funktion, der er fundet i opgave 6.9 ovenfor. Er det et godt tilbud (for kunden)?

6.4 Sweeping

Hvis vi betragter alle (eller faktisk kun 80 af) trekanterne i hele familien af deformationer fra eksempel 6.7 får vi overdækket det område i planen, som er vist i figur 6.8.

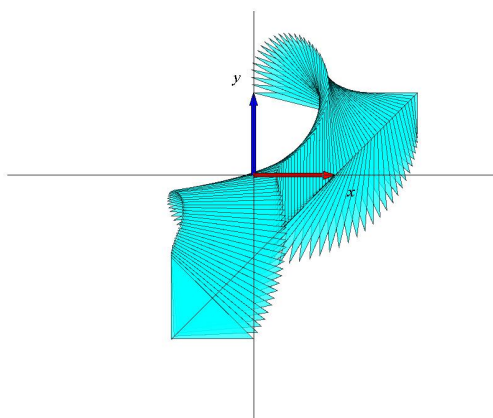
Hvis vi i stedet stækker trekanterne fra eksempel 6.7 i z -aksens retning, og benytter fodpunktsskurven $p(t) = (0, 0, 3t)$, $t \in [0, 1]$, så får vi konstrueret et tårn, som vist i figur 6.9.

OPGAVE 6.11. Bestem volumenet af tårnet i figur 6.9. Vink: Man kan med stor fordel benytte 'snitmetoden', som jo går ud på at integrere arealerne af de vandrette snit i tårnet.

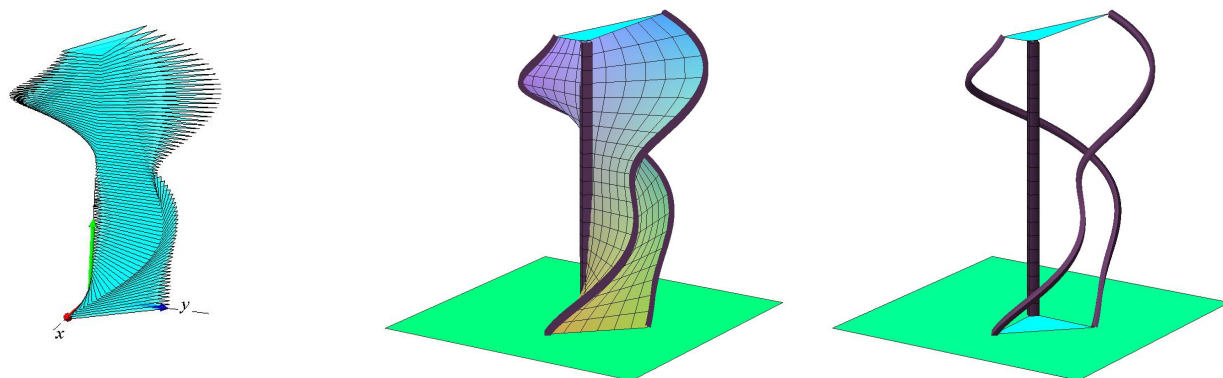
Som referencer til ovenstående tårnkonstruktion, se figur 6.11 og kapitel 13 i [Po].

Figur 6.6: Bevægelse af basis-trekanten dels med $\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{\Sigma}(t)\mathbf{V}^*(t)$ og dels med $\mathbf{U}(t)\mathbf{V}^*(t)$. Animeret. Se eksempel 6.7.

Figur 6.7: Bevægelsen af basis-trekanten som den ses fra det medfølgende hængsel. Animeret.



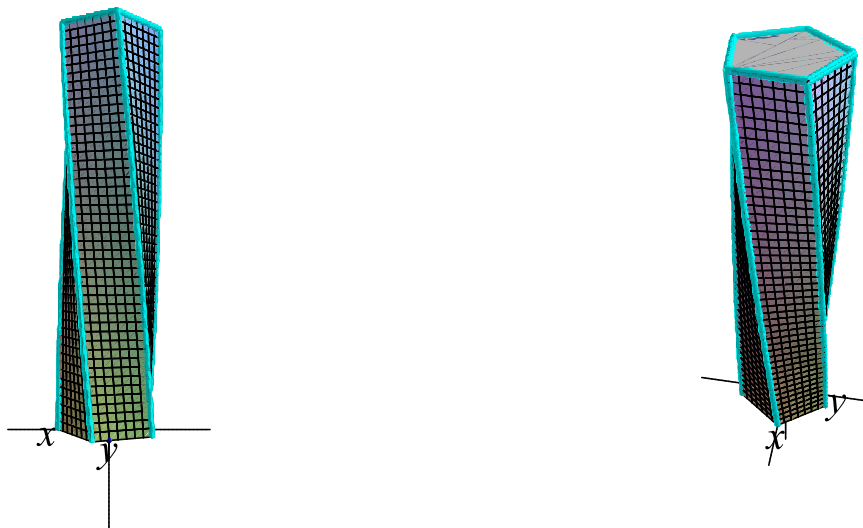
Figur 6.8: Det område i planen, som 'fejes ud' med de trekanter $\triangle(t)$, der frekommer ved familien af deformationer i eksempel 6.7.



Figur 6.9: Det område i rummet, som 'konstrueres' med trekanterne $\triangle(t)$ fra eksempel 6.7, idet fodpunktet for hængslerne nu bevæges langs z -aksen og trekanterne (be-)holdes vandrette, altså parallelle med (x, y) -planen.



Figur 6.10: Turning Torso Towers. I Malmö og Toronto, henholdsvis.



Figur 6.11: Turning Torso Towers modellering.

Kapitel 7

Geometrisk dynamik i 3D

Som antydnet i forrige kapitel 6 kan enhver 2×2 -deformationsmatrix \mathbf{K} essentielt skrives som et produkt af symmetrisk matrix og en rotationsmatrix (som definerer et medfølgende hængsel).

Det samme gælder for 3×3 -deformationsmatricer. Vi begynder dette kapitel med at formulere præcis hvad det resultat går ud på. Det er indholdet af følgende sætning om **polær dekomposition**:

Sætning 7.1. *Enhver regulær matrix \mathbf{K} kan skrives som et produkt*

$$\mathbf{K} = \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{F} \quad , \quad (7.1)$$

hvor \mathbf{R} er en rotationsmatrix, \mathbf{S} er en symmetrisk matrix med positive egenverdier, og \mathbf{F} er flip-matricen (der som bekendt afhænger af om $\det(\mathbf{K})$ er positiv eller negativ).

Rotationsmatricen \mathbf{R} og den symmetriske matrix \mathbf{S} kan selv faktoriseres og dekomponeres på følgende måde:

$$\mathbf{R} = \mathbf{U} \mathbf{V}^* \quad (7.2)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \quad ,$$

hvor \mathbf{U} , \mathbf{V} , og $\mathbf{\Sigma}$ er de velkendte matricer fra SVD faktoriseringen af \mathbf{K} , se nedenfor.

Bevis. Det er let at se dette når vi har SVD faktoriseringen af \mathbf{K} til rådighed.

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F} \quad . \quad (7.3)$$

Vi skriver simpelthen SVD faktoriseringen således - ved at indsætte en ekstra (enheds-)faktor $\mathbf{V}^* \mathbf{V} = \mathbf{E}$ strategisk mellem \mathbf{U} og $\mathbf{\Sigma}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F} \\ &= \mathbf{U} (\mathbf{V}^* \mathbf{V}) \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^* \mathbf{F} \\ &= (\mathbf{U} \mathbf{V}^*) (\mathbf{V} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^*) \mathbf{F} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{S} \mathbf{F} \quad , \end{aligned} \quad (7.4)$$

hvor UV^* er produkt af to rotationsmatricer og derfor selv en rotationsmatrix (hvorfor det?) Vi mangler blot at vise, at $S = V\Sigma V^*$ er en symmetrisk matrix. Men det følger af at:

$$\begin{aligned} S^* &= (V\Sigma V^*)^* \\ &= V^{**}\Sigma^* V^* \\ &= V\Sigma V^* \\ &= S \quad , \end{aligned} \tag{7.5}$$

hvor vi har benyttet, at der klart gælder $\Sigma^* = \Sigma$ og $V^{**} = V$. □

OPGAVE 7.2. Bestem polære dekompositioner for hver af følgende deformationsmatricer (nummereringen stammer fra den tidligere opgave 4.14, som handlede om SVD faktoriseringen af disse matricer):

$$\begin{aligned} K_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ K_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ K_5 &= \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \\ K_6 &= \begin{bmatrix} 1 & -4\sqrt{3} & -3 \\ \sqrt{3} & 4 & -3\sqrt{3} \\ 6 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \end{aligned} \tag{7.6}$$

7.1 Samtidig bevægelse og deformation af tetraeder

Vi vil nu se på hvad ovenstående polære dekomposition betyder for en generel tidsafhængig deformation og bevægelse af et tetraeder i rummet - på samme måde som vi diskuterede dette for samtidig bevægelse og deformation af trekanter i planen i forrige kapitel.

Et (fod)punkt p for et tetraeder bevæger sig altså nu i rummet og har til ethvert tidspunkt t et sæt koordinater med hensyn til det gode gamle fast valgte koordinatsystem $\{O, x, y, z\}$:

$$p = p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) , \quad t \in I \quad , \tag{7.7}$$

hvor I betegner det tidsinterval, hvori bevægelsen er beskrevet - sædvanligvis, når ikke andet er nævnt, vil vi bruge $I = \mathbb{R}$.

OPGAVE 7.3. Bestem en tidsparametrisering $p(t)$, $t \in I$, af den cirkel C i rummet, som har centrum i $(1, 0, 0)$, radius 3, og som ligger i den plan igennem centret som står vinkelret på vektoren $(1, 1, 1)$. Vælg I sådan at cirklen gennemløbes netop én gang.

Eksempel 7.4. Et eksempel er vist med fodpunkts-kurven i figur 7.1. Den viste (animerede) bevægelse er simpelthen givet ved:

$$p(t) = (-1 + 3t, -2 + 3t, 0) \quad , \quad \text{hvor } t \in [0, 1] \quad . \quad (7.8)$$

I den samme figur er vist en ikke-triviell animeret deformation af et tetraeder. Læg mærke til, at det er selve tetraederdeformationen der stadig er det interessante - ikke selve fodpunkts-bevægelsen. (Det forhold vil ændre sig dramatisk i næste kapitel, hvor vi vil koble deformationen til fodpunktsbevægelsen og *styre* deformationen af tetraederet blandt andet ved hjælp af banekurven for fodpunkts-bevægelsen.)

Den viste deformation af tetraederet er givet ved følgende fuldstændige specifikation af det markerede treben:

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t)) \\ &= \mathbf{K}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(t) \quad , \quad \text{hvor } t \in [0, 1] \text{ og} \end{aligned}$$

$$p(t) = (-1 + 3t, -2 + 3t, 0) \quad , \quad \text{og kantvektorerne er givet ved}$$

$$[\mathbf{a}^*(t) \mathbf{b}^*(t) \mathbf{c}^*(t)] = \mathbf{K}(t) \quad , \quad \text{hvor}$$

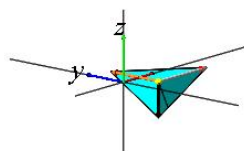
$$\mathbf{K}(t) = \mathbf{U}(t) \mathbf{\Sigma}(t) \mathbf{V}^*(t) \quad (7.9)$$

$$\mathbf{\Sigma}(t) = \begin{bmatrix} 1+t & 0 & 0 \\ 0 & 1+(t/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1-(t/2) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_z(2\pi t) \mathbf{R}_y(2\pi t) \mathbf{R}_x(2\pi t)$$

$$\mathbf{V}^*(t) = \mathbf{R}_z(-\pi t) \mathbf{R}_y(-\pi t) \mathbf{R}_x(-\pi t) \quad .$$

Det fremgår (også af animationen), at selv om deformationsmatricen har et rimeligt simpelt udtryk, så er bevægelsen langt fra simpel. Det skyldes udelukkende de involverede rotationer.



Figur 7.1: Deformation af tetraeder med $\mathbf{K}(t)$ som specificeret i eksempel 7.4, se de definerende ligninger (7.9). Animeret.

Selve strækningen og kompressionen af tetraederet fra start til slut er bestemt af $\sigma_i(t)$ -værdierne i $\Sigma(t)$ og de kan jo direkte aflæses, sådan at vi for eksempel umiddelbart kan løse følgende typiske opgaver:

OPGAVE 7.5. Bestem til ethvert tidspunkt $t \in [0, 1]$ volumenet $\text{Rumfang}(\boxtimes(t))$ af det tetraeder som er defineret i (7.9).

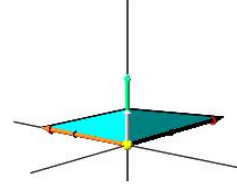
OPGAVE 7.6. Hvis vi benytter standard-prissætningen for tetraedre, hvor meget koster det så at få lavet følgende stak bestående af 1000 tetraedre som er produceret efter forskriften fra eksempel 7.4, se ligning (7.9): $\boxtimes(t_i)$, $t_i = i/1000$, $i = 1, 2, 3, \dots, 1000$.

Hvis vi ikke roterer, det vil sige hvis vi kun benytter $\mathbf{S}(t)$ -delen af den polære dekomposition for $\mathbf{K}(t)$, så får vi den deformation af tetraederet som er vist i figur 7.2.

Det er stadigvæk rotationerne i rummet og altså rotationsdelen $\mathbf{R}(t)$ af de polære dekompositioner, det er sværest at forstå - så dem vil vi dyrke lidt nærmere i det følgende.

7.2 Differentiation af tidsafhængig rotationsmatrix

For at forstå hvordan rotationer og rotationsmatricer $\mathbf{R}(t)$ udvikler sig og virker i rummet, er det nødvendigt at undersøge og finde simple udtryk for deres tids-afledede $\mathbf{R}'(t)$. Hvis den tidsaf-



Figur 7.2: Deformation af basistetraederet med den symmetriske matrix $\mathbf{S}(t)$ fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ fra eksempel 7.4. Animeret.

hængige 3×3 —rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$ er givet ved sine element-funktioner således:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix}, \quad (7.10)$$

så er $\mathbf{R}'(t)$ defineret ved de t —afledede af de enkelte element-funktioner $r_{ij}(t)$ sådan her:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix}. \quad (7.11)$$

Da vi antager, at $\mathbf{R}(t)$ er rotationsmatrixer for enhver værdi af $t \in \mathbb{R}$, så gælder der per definition 4.4, dels at $\det(\mathbf{R}(t)) = 1$ for alle t og dels at

$$\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t). \quad (7.12)$$

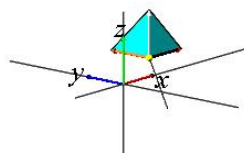
Så gælder derfor også for alle t at

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{E}. \quad (7.13)$$

Den ligning kan vi differentiere med hensyn til t og får så, da \mathbf{E} er en konstant matrix:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^*(t)) = \mathbf{O}, \quad \text{dvs.} \quad (7.14)$$

$$\mathbf{R}'(t)\mathbf{R}^*(t) + \mathbf{R}(t)\mathbf{R}'^*(t) = \mathbf{O}.$$



Figur 7.3: Rotation med rotationsmatricen $\mathbf{R}(t)$ fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ fra eksempel 7.4. Animeret.

OPGAVE 7.7. Vis - eller giv et selvvalgt ikke-trivielt eksempel, der viser - at de to ligninger i ovenstående ligning (7.14) er ækvivalente, altså at man kan finde den **aflædede af et matrix-produkt** med 'den sædvanlige produkt-metode', som kendes for funktioner: $(f(t)g(t))' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$. Vink: Kig eventuelt først på 2×2 -matricer $\mathbf{R}(t)$.

Det vil sige, at der for rotationsmatricerne $\mathbf{R}(t)$ altid gælder:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}'(t)\mathbf{R}^*(t) &= -\mathbf{R}(t)\mathbf{R}'^*(t) \\ &= -(\mathbf{R}'(t)\mathbf{R}^*(t))^* \quad .\end{aligned}\tag{7.15}$$

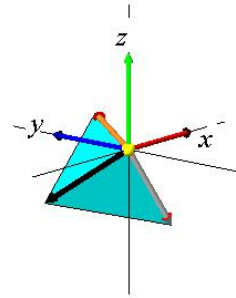
7.3 Skævsymmetriske matricer

Ligningen (7.15) ovenfor betyder, at matricen $\mathbf{\Omega}(t) = \mathbf{R}'(t)\mathbf{R}^*(t)$ er *skævsymmetrisk* for enhver værdi af t i følgende forstand:

Definition 7.8. En matrix \mathbf{A} er *skævsymmetrisk* hvis $\mathbf{A}^* = -\mathbf{A}$.

OPGAVE 7.9. Vis, at en given 3×3 -matrix $\mathbf{\Omega}$ er skævsymmetrisk hvis og kun hvis der findes 3 tal α , β , og γ , således at

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{bmatrix} \quad .\tag{7.16}$$



Figur 7.4: Rotationen af tetraederet i 7.3 med fast fodpunkt i Origo. Animeret.

7.3.1 Akse-vektorer og akse-matricer

Skævsymmetriske 3×3 -matricer er altså ret simple i den forstand, at de kan beskrives ved tre elementer. Og tre elementer er jo netop også tilstrækkelige og nødvendige til beskrivelse af en vektor i rummet. Følgende sætning er derfor ikke så overraskende (vi vil igen formulere sætningen med Ω , fordi vi især skal bruge sætningen for de skævsymmetriske matricer $\Omega(t)$, som vi fandt ovenfor i forbindelse med undersøgelsen af tidsafhængige rotationer $R(t)$) :

Sætning 7.10. *Lad Ω være en vilkårlig given skævsymmetrisk 3×3 -matrix. Så findes der en entydigt bestemt vektor ω , således at*

$$\Omega v^* = (\omega \times v)^* \quad \text{for alle vektorer } v, \quad (7.17)$$

og den vektor ω er simpelthen givet ved de tre elementer fra Ω som er markeret i opgave 7.9 ovenfor:

$$\omega = (\alpha, \beta, \gamma) = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21}) \quad . \quad (7.18)$$

Bevis. Vi skal bare vise, at den påståede vektor ω har den ønskede egenskab og at det er den eneste vektor med den egenskab. Men det følger af de direkte udregninger:

$$(\omega \times v)^* = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} \quad (7.19)$$

og

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ \omega_1 v_2 - \omega_2 v_1 \end{bmatrix} . \quad (7.20)$$

Altså samme resultat for alle $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Det vil sige, at den anviste vektor $\boldsymbol{\omega}$ faktisk opfylder (7.17). Vi mangler så kun at vise, at det er den eneste vektor der kan bruges. Hvis $\boldsymbol{\eta}$ er en anden vektor med den samme egenskab som $\boldsymbol{\omega}$, altså at den også opfylder (7.17), så er specielt også

$$\begin{aligned} ((\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{v})^* &= \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}^* - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}^* = \mathbf{0}^* \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \quad \text{dvs.} \\ (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta}) \times \mathbf{v} &= \mathbf{0} \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

og *det* er kun muligt for $\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ (hvorfor det?), så $\boldsymbol{\eta}$ kan ikke være *en anden* vektor end $\boldsymbol{\omega}$, og det var det, vi skulle vise. \square

Definition 7.11. Hvis $\boldsymbol{\Omega}$ er en vilkårlig givet skævsymmetrisk 3×3 -matrix med de 9 elementer Ω_{ij} , så kalder vi

$$\boldsymbol{\omega} = (\Omega_{32}, \Omega_{13}, \Omega_{21})$$

den til $\boldsymbol{\Omega}$ *associerede akse-vektor*.

Den omvendte sætning gælder også:

Sætning 7.12. Lad $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ være en vilkårlig givet vektor i rummet. Så findes der en entydigt bestemt skævsymmetrisk matrix $\boldsymbol{\Omega}$, således at

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})^* = \boldsymbol{\Omega} \mathbf{v}^* \quad \text{for alle vektorer } \mathbf{v}, \quad (7.22)$$

og den matrix $\boldsymbol{\Omega}$ er givet ved de tre elementer fra $\boldsymbol{\omega}$ således

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} . \quad (7.23)$$

Bevis. Ligesom for sætning 7.10. \square

Definition 7.13. Hvis $\boldsymbol{\omega}$ er en vilkårlig given vektor med elementerne $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, så kalder vi

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

den til $\boldsymbol{\omega}$ *associerede akse-matrix*.

OPGAVE 7.14. En skævsymmetrisk matrix $\boldsymbol{\Omega}$ har følgende kendte elementer:

$$\Omega_{12} = 3, \quad \Omega_{13} = -4, \quad \Omega_{23} = 1. \quad (7.24)$$

Bestem den til $\boldsymbol{\Omega}$ associerede aksevektor.

OPGAVE 7.15. En given vektor ω har egenskaberne:

$$\omega \times (1, 1, 0) = (-3, 3, -1) \quad , \quad \omega \times (0, 1, 1) = (-1, -1, 1) \quad . \quad (7.25)$$

Bestem den til ω associerede aksematrix.

7.4 Tidsafhængige rotationsmatricer

Som allerede udviklet ovenfor får vi skævsymmetriske matricer serveret en masse ved til ethvert tidspunkt at danne en ganske bestemt produktmatrix ud fra en given tidsafhængig rotationsmatrix

$$\Omega(t) = \mathbf{R}'(t) \mathbf{R}^*(t) \quad , \quad (7.26)$$

Lad os begynde med de simpleste rotationer, koordinat-akse-rotationerne, som vi først stiftede bekendtskab med i 4.17.

OPGAVE 7.16. Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$ som defineret i 4.17. (Bemærk, at vi har udskiftet den uafhængige variable w med t .) Dvs.

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (7.27)$$

Bestem for enhver værdi af t den skævsymmetriske matrix $\Omega(t)$ efter forskriften 7.26, og bestem dernæst den til $\Omega(t)$ associerede aksevektor $\omega(t)$ for ethvert tidspunkt t .

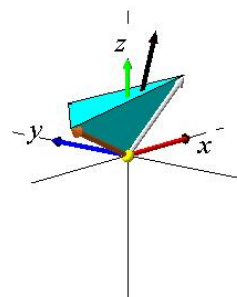
OPGAVE 7.17. Samme opgave som ovenfor, men nu for de to andre elementar-rotationer, henholdsvis $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_x(t)$ og $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(t)$.

OPGAVE 7.18. Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t))$, hvor $\theta(t)$ er en givet funktion af t , altså

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(\theta(t)) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \quad (7.28)$$

Bestem $\Omega(t)$ og den associerede aksevektor $\omega(t)$. Vink: Det kan være en god idé først at bestemme $\omega(t)$ for et specielt, konkret, valg af vinkelfunktion $\theta(t)$, for eksempel $\theta(t) = 7t$.

OPGAVE 7.19. Lad $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_y(\pi/4) \mathbf{R}_x(t)$. Bestem $\Omega(t)$ og den associerede aksevektor-funktion $\omega(t)$.



Figur 7.5: Rotationen af tetraederet i 7.3 med tilhørende antydet akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Animeret.

7.4.1 Rotationer med given akse-vektor-funktion

Hvis vi har fået givet en vektorfunktion $\boldsymbol{\omega}(t)$, kan vi så finde en rotation $\mathbf{R}(t)$ der har $\boldsymbol{\omega}(t)$ som aksevektor til ethvert tidspunkt t ? Det er ikke svært, vi skal jo 'bare' finde $\mathbf{R}(t)$, således at

$$\mathbf{R}'(t) \mathbf{R}^*(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \quad , \quad (7.29)$$

hvor $\boldsymbol{\Omega}(t)$ er den aksematrix, der til tidspunktet t har $\boldsymbol{\omega}(t)$ som associeret aksevektor. Ligningen er ækvivalent med følgende matrix-differentialligning, idet vi jo stadig har at $\mathbf{R}^*(t) = \mathbf{R}^{-1}(t)$:

$$\mathbf{R}'(t) = \boldsymbol{\Omega}(t) \mathbf{R}(t) \quad . \quad (7.30)$$

Det vil sige, vi skal bestemme $\mathbf{R}(t)$ sådan at følgende ligning er opfyldt:

$$\mathbf{R}'(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{R}(t)$$

$$\begin{bmatrix} r'_{11}(t) & r'_{12}(t) & r'_{13}(t) \\ r'_{21}(t) & r'_{22}(t) & r'_{23}(t) \\ r'_{31}(t) & r'_{32}(t) & r'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}(t) & r_{12}(t) & r_{13}(t) \\ r_{21}(t) & r_{22}(t) & r_{23}(t) \\ r_{31}(t) & r_{32}(t) & r_{33}(t) \end{bmatrix} ,$$

hvor vi har brugt definition 7.13 og indsat de kendte koordinatfunktioner for $\boldsymbol{\omega}(t)$ i aksematricen.

Det vil sige, at hver søjle i $\mathbf{R}(t)$ skal opfylde det samme differentialligningssystem bestående af 3 koblede lineære ligninger med 3 ubekendte funktioner:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r'_{11}(t) \\ r'_{21}(t) \\ r'_{31}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11}(t) \\ r_{21}(t) \\ r_{31}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r'_{12}(t) \\ r'_{22}(t) \\ r'_{32}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12}(t) \\ r_{22}(t) \\ r_{32}(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} r'_{13}(t) \\ r'_{23}(t) \\ r'_{33}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3(t) & \omega_2(t) \\ \omega_3(t) & 0 & -\omega_1(t) \\ -\omega_2(t) & \omega_1(t) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13}(t) \\ r_{23}(t) \\ r_{33}(t) \end{bmatrix} . \end{aligned} \quad (7.31)$$

Hver søjle i $\mathbf{R}(t)$ tilfredsstiller altså *et og samme* differentialligningssystem, dvs. de har *fælles* systemmatrix $\mathbf{\Omega}(t)$.

Hvis vi derfor kalder de tilsvarende vektorer - svarende til koordinatsøjlerne i $\mathbf{R}(t)$ - henholdsvis $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$, således at

$$\mathbf{R}(t) = [\mathbf{e}^*(t) \mathbf{f}^*(t) \mathbf{g}^*(t)] , \quad (7.32)$$

så er (7.31) ækvivalent med:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'^*(t) &= \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{e}^*(t) \\ \mathbf{f}'^*(t) &= \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{f}^*(t) \\ \mathbf{g}'^*(t) &= \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{g}^*(t) , \end{aligned} \quad (7.33)$$

Hvis vi skriver de 3 ligninger på kompakt form, så får vi netop den ligning vi startede med, ligning (7.30):

$$[\mathbf{e}'^*(t) \mathbf{f}'^*(t) \mathbf{g}'^*(t)] = \mathbf{\Omega}(t) [\mathbf{e}^*(t) \mathbf{f}^*(t) \mathbf{g}^*(t)] \quad (7.34)$$

$$\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{R}(t) ,$$

så pengene passer!

Men ved at indføre vektorerne $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ kan vi skrive ligningerne i (7.33) ved hjælp af den til $\mathbf{\Omega}(t)$ associerede akse-vektor $\mathbf{\omega}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= \mathbf{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= \mathbf{\omega}(t) \times \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= \mathbf{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t) \end{aligned} \quad (7.35)$$

Der er altså flere forskellige måder at udtrykke differentialligningerne på, når vi skal finde $\mathbf{R}(t)$ med en given akse-vektor-funktion $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Lad os se på et første simpelt eksempel:

Eksempel 7.20. Lad $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, 2)$ for alle $t \in \mathbb{R}$ og antag, at $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$. Vi vil finde den rotation $\mathbf{R}(t)$, som hører til rotations-akse-vektor-funktionen $\boldsymbol{\omega}(t)$, og som tilfredsstiller den givne begyndelsesbetingelse. Den første vektor-differentialligning i (7.35) kan vi skrive således:

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'(t) &= (0, 0, 2) \times \mathbf{e}(t) \\ (e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)) &= (0, 0, 2) \times (e_1(t), e_2(t), e_3(t)) \\ (e'_1(t), e'_2(t), e'_3(t)) &= (-2e_2(t), 2e_1(t), 0)\end{aligned}\tag{7.36}$$

$$\begin{bmatrix} e'_1(t) \\ e'_2(t) \\ e'_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{bmatrix}.$$

Det system har løsningerne (den fuldstændige løsningsmængde):

$$\begin{aligned}e_3(t) &= c_3 \\ e_1(t) &= c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t) \\ e_2(t) &= -c_2 \cos(2t) + c_1 \sin(2t),\end{aligned}\tag{7.37}$$

hvor c_1 , c_2 , og c_3 er vilkårlige (arbitrære) konstanter. De konstanter fastlægges via begyndelsesbetingelserne til tiden $t = 0$, som for den første søjle-vektor $\mathbf{e}(0)$ i $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ er følgende: $e_3(0) = 0$, så $c_3 = 0$; $e_1(0) = 1$, så $c_1 = 1$; den sidste betingelse, $e_2(0) = 0$ giver endelig $c_2 = 0$.

Løsningen for vektorfunktionen $\mathbf{e}(t)$ er derfor:

$$\mathbf{e}(t) = (\cos(2t), \sin(2t), 0) \quad .\tag{7.38}$$

Tilsvarende kan den samme fuldstændige løsning fra (7.37) benyttes til bestemmelse af $\mathbf{f}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$. Det er kun begyndelsesbetingelserne, der er forskellige. Resultaterne er:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t) &= (-\sin(2t), \cos(2t), 0) \\ \mathbf{g}(t) &= (0, 0, 1),\end{aligned}\tag{7.39}$$

således at den søgte rotation $\mathbf{R}(t)$ er:

$$\mathbf{R}(t) = [\mathbf{e}^*(t) \mathbf{f}^*(t) \mathbf{g}^*(t)] = \begin{bmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) & 0 \\ \sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad .\tag{7.40}$$

OPGAVE 7.21. Eftersis ved direkte udregning, at den fundne løsning i eksempel 7.20 ovenfor faktisk *er* en løsning, både til differentialligningssystemet $\mathbf{R}'(t) = \mathbf{\Omega}(t) \mathbf{R}(t)$ og til begyndelsesværdikravet: $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$.

OPGAVE 7.22. Bestem på samme måde som i eksempel 7.20 de rotationer $\mathbf{R}(t)$ som giver nedenstående akse-vektor-funktioner $\mathbf{\omega}(t)$, idet det igen antages, at $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{\omega}(t) &= (0, 1, 2) \\ \mathbf{\omega}(t) &= (1, 1, 2) \\ \mathbf{\omega}(t) &= (0, 0, t) \\ \mathbf{\omega}(t) &= (0, 0, t^2) \quad .\end{aligned}\tag{7.41}$$

Eksempel 7.23. Hvis vi lader $\mathbf{\omega} = (0, 0, (\pi/2) \sin(t))$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ fås ved løsning af differentiaalligningssystemerne ovenfor den rotation, som ses i figur 7.6. Akse-vektor-funktionen er også vist der. Løsningen er givet ved:

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \sin(\pi \cos(t)/2) & -\cos(\pi \cos(t)/2) & 0 \\ \cos(\pi \cos(t)/2) & \sin(\pi \cos(t)/2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .\tag{7.42}$$

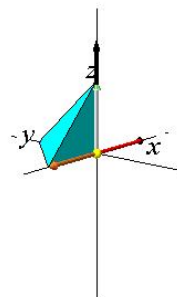
OPGAVE 7.24. Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.23, ligning (7.42), er korrekt.

Eksempel 7.25. Hvis vi lader $\mathbf{\omega} = (0, 0, 2 \sin^2(t))$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$, så får vi (ved numerisk løsning af differentiaalligningssystemerne ovenfor) den rotation, som er vist i figur 7.7.

Eksempel 7.26. Rotations-akse-vektoren $\mathbf{\omega} = (\cos(t), \sin(t), 1)$ og $\mathbf{R}(0) = \mathbf{E}$ er benyttet i figur 7.8. Rotations-løsningen er:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t) \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t) \cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} .\tag{7.43}$$

OPGAVE 7.27. Vis ved direkte check, at den angivne løsning i eksempel 7.26, ligning (7.43), er korrekt.



Figur 7.6: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\omega(t) = (0, 0, 2 \sin(t))$. Animeret.

7.5 Outlook

Med de værktøjer, vi nu har kridtet banen op med, er vi parate til at undersøge, hvordan punkterne inde i et tetraeder $\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{a}(t), \mathbf{b}(t), \mathbf{c}(t))$ bevæger sig, når selve tetraederet fremkommer ved rotation af et basistetraeder med en rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$, samtidig med at fodpunktet bevæges via en given forskrift $p(t)$.

For eksempel kan vi som en første naturlig opgave undersøge bevægelsen af et hjørnepunkt i tetraederet, for eksempel det hjørnepunkt $q(t)$, der er spidspunkt for $\mathbf{a}(t)$ når vi benytter $p(t)$ som fodpunkt for $\mathbf{a}(t)$. Hvis vi kalder stedvektoren til $p(t)$ for $\mathbf{p}(t)$, så er stedvektoren til $q(t)$ givet ved:

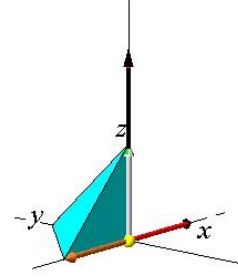
$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{a}(t) + \mathbf{p}(t) \quad . \quad (7.44)$$

Eksempel 7.28. Hvis vi betragter den konkrete rotation af basistetraedet, som stammer fra den polære dekomposition af $\mathbf{K}(t)$ i eksempel 7.4, dvs. den rotation, der er vist i figur 7.3, så er banekurven for $q(t)$ den kurve, der er vist i figur 7.9.

I et følgende kapitel vil vi blandt andet undersøge farten og retningen af bevægelsen af punktet $q(t)$, altså hastighedsvektoren for bevægelsen af punktet til ethvert tidspunkt t .

Bemærk, at farten og retningen af bevægelsen af fodpunktet $p(t)$ er direkte givet ved den tidsafledede af stedvektoren til $p(t)$:

$$\mathbf{p}'(t) = (p'_1(t), p'_2(t), p'_3(t)) \quad , \quad (7.45)$$



Figur 7.7: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\boldsymbol{\omega}(t) = (0, 0, 2\sin^2(t))$. Animeret.

og helt tilsvarende har vi fra 7.44

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{a}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad . \quad (7.46)$$

Da $\mathbf{a}(t)$ er fremkommet ved at gange $\mathbf{R}(t)$ på koordinatsøjlen for den første kantvektor i basistetraederet, altså for basisvektoren \mathbf{i} , så er koordinatsøjlen for $\mathbf{a}(t)$ præcis den første søjle i $\mathbf{R}(t)$. Vektoren $\mathbf{a}(t)$ er altså (når vi betragter rotationer) den vektor, som vi har kaldt $\mathbf{e}(t)$ i ligning 7.32. Det vil sige, at

$$\mathbf{q}'(t) = \mathbf{e}'(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \quad (7.47)$$

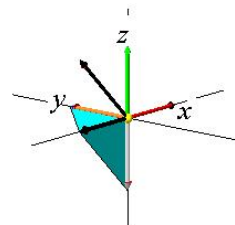
men så har vi jo fra ligning (7.35), at

$$\mathbf{q}'(t) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \mathbf{p}'(t) \quad , \quad (7.48)$$

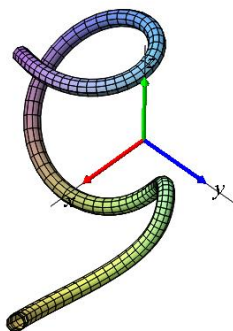
hvor $\boldsymbol{\omega}(t)$ er den til rotationen $\mathbf{R}(t)$ associerede akse-vektor-funktion. Tilsvarende udtryk etableres lige så let for hastighederne af bevægelsen af de to resterende hjørnepunkter i tetraederet.

OPGAVE 7.29. Brug ovenstående metode til at bestemme hastighederne for bevægelsen af de tre hjørnepunkter (overfor fodpunktet $p(t)$) i tetraeder-deformationerne bestemt ved følgende rotationer og fodpunktsbevægelser for $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \boxtimes_1(t) &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \\ \boxtimes_2(t) &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + (1, t, t) \\ \boxtimes_3(t) &= \mathbf{R}_z(7t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \\ \boxtimes_4(t) &= \mathbf{R}_y(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \quad . \end{aligned} \quad (7.49)$$



Figur 7.8: Rotation af basistetraederet med akse-vektor funktion $\mathbf{\omega}(t) = (\cos(t), \sin(t), 1)$. Animeret.



Figur 7.9: Baneurve for hjørnepunkt i det roterede tetraeder i figur 7.3

Kapitel 8

Styring

I dette kapitel vil vi som lovet se nærmere på, hvordan vi kan benytte fodpunktskurven $p(t)$ og fodpunktskurvens geometriske egenskaber, såsom krumning og torsion (der defineres nedenfor), til at kontrollere og styre bevægelserne af tetraedrene i rummet.

8.1 Kurver med enhedsfart

Med henblik på at gøre diskussionen lettere vil vi nedenfor ofte antage, at de fodpunktskurver vi bruger, er parametriserede på en sådan måde, at farten er konstant 1, dvs. at hastighedsvektoren $\mathbf{p}'(t)$ har konstant længde 1. Den antagelse kan vi udtrykke på forskellige måder:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{p}'(t)\| &= 1 \\ \|(p'_1(t), p'_2(t), p'_3(t))\| &= 1 \\ \sqrt{p'^2_1(t) + p'^2_2(t) + p'^2_3(t)} &= 1 \\ \sqrt{v^2_1(t) + v^2_2(t) + v^2_3(t)} &= 1 \\ \|(v_1(t), v_2(t), v_3(t))\| &= 1 \\ \|\mathbf{v}(t)\| &= 1 \quad ,\end{aligned}\tag{8.1}$$

hvor vi også har indført og brugt betegnelsen $\mathbf{v}(t)$ for hastighedsvektoren $\mathbf{p}'(t)$.

OPGAVE 8.1. Hvilke af følgende kurver, som er angivet ved stedvektor-funktionerne $\mathbf{p}(t)$ til de respektive fodpunktskurver $p(t)$, har konstant fart 1 ? (Alle tidsintervaller er, når ikke andet er

anført, hele den reelle talakse \mathbb{R} .)

$$\begin{aligned}
 i) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, 1, t) \\
 ii) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, t, t^2) \\
 iii) \quad \mathbf{p}(t) &= (t, t^2, t^3) \\
 iv) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, \cos(t), \sin(t)) \\
 v) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, 2\cos(t), 2\sin(t)) \\
 vi) \quad \mathbf{p}(t) &= (1, \cos(2t), \sin(2t)) \\
 vii) \quad \mathbf{p}(t) &= (t, \cos(t), \sin(t)) \\
 viii) \quad \mathbf{p}(t) &= \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \sin(t), -\frac{3}{5}\cos(t) \right) .
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

OPGAVE 8.2. En kurve - en såkaldt **helix** eller **vindellinje** - er givet som følger, hvor a og b betegner to konstanter, der ikke begge er 0:

$$\mathbf{p}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt) . \tag{8.3}$$

1. Tegn (eller plot) selv kurven for forskellige valg af a og b . Se et par (fede) eksempler i figur 8.1.
2. Forklar, hvorfor det er rimeligt, at den ene kaldes højreskruet og den anden venstreskruet i figur 8.1.
3. Bestem hvilke a og b der giver højreskrunding og hvilke der giver venstreskrunding.
4. Find for enhver værdi af a og b farten af den tilhørende bevægelse langs kurven, når bevægelsesforskriften er den givne $\mathbf{p}(t)$.

Lad $s(t)$ betegne en funktion af tiden t som har en omvendt funktion $t(s)$. For eksempel, hvis $s(t) = 3t + 6$ så er $t(s) = (s - 6)/3$. Hvis vi har givet en tidsparametriseret kurve $\mathbf{p}(t)$ kan vi **omparametrisere** den samme kurve til en s -parametriseret kurve således:

$$\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(t(s)) = (p_1(t(s)), p_2(t(s)), p_3(t(s))) . \tag{8.4}$$

For eksempel, hvis $\mathbf{p}(t)$ betegner kurven i opgave 8.2 for givne værdier af a og b , og hvis $s(t) = 3t + 6$, så er

$$\boldsymbol{\eta}(s) = (a \cos((s - 6)/3), a \sin((s - 6)/3), b(s - 6)/3) . \tag{8.5}$$

Med dette eksempel har vi illustreret - og endda antydnet argumentet for - følgende generelle sætning.



Figur 8.1: En højreskruet og en venstreskruet helix.

Sætning 8.3. Enhver kurve $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t kan omparametriseres ved hjælp af en funktion $s(t)$, således at den omparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(t(s))$ har farten $\boldsymbol{\eta}'(s) = 1$ for alle s .

OPGAVE 8.4. Bestem farten af den s -parametriserede kurve i (8.5), dvs. længden af $\frac{d}{ds}\boldsymbol{\eta}(s) = \boldsymbol{\eta}'(s)$ for enhver værdi af s .

OPGAVE 8.5. Bestem funktionen $s(t)$ således at farten af den omparametriserede kurve $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(t(s))$ fra (8.3) får den konstante værdi 1.

Bemærkning 8.6. Sætning 8.3 kan tolkes således: Hvis det er muligt at køre på en vej uden at stoppe op (men med tilladte accelerationer og decelerationer), så er det også muligt at køre med konstant fart på den samme vej hele vejen. Hvis farten er konstant 1 så kan man aflæse tiden på kilometertælleren og man kan aflæse det kørte antal kilometer på sit stopur. (Hvorfor det?)

OPGAVE 8.7. Lad $p(t)$ betegne følgende t -parametriserede kurve

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (t^2, 0, 0) \quad . \quad (8.6)$$

Vis, at den kurve *ikke* har positiv fart for alle t , men at den (alligevel) kan omparametriseres til en enhedsfart-parametriseret kurve.

OPGAVE 8.8. Lad $p(t)$ betegne følgende cirkel for en given værdi af $a \neq 0$:

$$p(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t)) = (a \cos(t), a \sin(t), 0) \quad (8.7)$$

med tilhørende stedvektorfunktion $\mathbf{p}(t)$, hvor $t \in [0, 2\pi]$.

1. Bestem $s(t)$ sådan at omparametriseringen $\boldsymbol{\eta}(s) = \mathbf{p}(t(s))$ giver en parametrisering af kurven med enhedsfart.
2. Angiv et interval for parameteren s således at $\boldsymbol{\eta}(s)$ gennemløber samme punktmængde som $\mathbf{p}(t)$ netop én gang.

OPGAVE 8.9. Lad $p(t)$ betegne følgende kurve:

$$p(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad (8.8)$$

med tilhørende stedvektorfunktion $\mathbf{p}(t)$, hvor $t \in]-1, 1[$. Tegn (plot) kurven, og vis, at den faktisk allerede er enhedsfart-parametriseret.

Når en kurve er enhedsfart-parametriseret vil vi ofte bruge notationen s for parameteren - eller bemærke eksplicit, om parametriseringen har enhedsfart eller ej.

8.2 Lodret tetraeder transport

Vi antager, at $p(s)$, $s \in [0, L]$, er en kurve i rummet, der, som notationen anviser, er enhedsfart-parametriseret, således at stedvektor-funktionens s -afledede har fart $\|\mathbf{p}'(s)\| = 1$.

Vi ønsker at transportere varer i en (stål-)beholder langs med kurven i rummet fra punktet $p(0)$ til punktet $p(L)$. Beholderen har *form* som en ikke-skaleret kopi af standard basis-tetraederet $\boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Det vil sige, at for enhver værdi af s er beholderen givet ved følgende roterede og parallel-forskudte tetraeder i rummet:

$$\boxtimes(s) = \mathbf{R}(s) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(s) = \boxtimes(p(s), \mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)) \quad , \quad (8.9)$$

hvor $\mathbf{R}(s)$ er en rotationsmatrix,

$$\mathbf{R}(s) = [\mathbf{e}^*(s) \mathbf{f}^*(s) \mathbf{g}^*(s)] \quad , \quad (8.10)$$

som vi nu vil beskrive i afhængighed af fodpunktskurven $p(s)$.

Vi ønsker (naturligt nok) at beholderen er 'lodret' for alle værdier af s . Det svarer til, at den tredje kantvektor i tetraederet $\boxtimes(s)$ er $\mathbf{g}(s) = \mathbf{k} = (0, 0, 1)$ for alle s .

Desuden vil vi *styre* beholderen således at den første kantvektor $\mathbf{e}(s)$ i $\boxtimes(s)$ for alle s ligger i den plan, der er udspændt af $\mathbf{p}'(s)$ og \mathbf{k} , således at beholderen i den forstand er *styret* og bevæges 'fremad' i forhold til fodpunktskurven samtidig med, at beholderen holdes lodret. Bemærk, at her har vi antaget, at $\mathbf{p}'(s)$ ikke er proportional med \mathbf{k} , fordi ellers kan de to vektorer ikke udspænde en plan. Det svarer til at antage, at den betragtede transport-kurve ikke har lodret tangent for nogen værdi af s . (Hvorfor det?)

De givne oplysninger om tetraeder-beholderen giver følgende udtryk for de to resterende kantvektorer som funktioner af s :

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(s) &= (p'_1(s), p'_2(s), 0) / \sqrt{p_1'^2(s) + p_2'^2(s)} \\ \mathbf{f}(s) &= (-p'_2(s), p'_1(s), 0) / \sqrt{p_1'^2(s) + p_2'^2(s)} \quad .\end{aligned}\tag{8.11}$$

OPGAVE 8.10. Vis, at udtrykkene for $\mathbf{e}(s)$ og $\mathbf{f}(s)$ i ligning (8.11) følger af de givne antagelser om tetraeder-beholderen.

De antagelser fastlægger nu rotationsmatricen $\mathbf{R}(s)$ og dermed tetraeder-beholderen for alle værdier af s :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(s) &= [\mathbf{e}^*(s) \mathbf{f}^*(s) \mathbf{g}^*(s)] \\ &= \frac{1}{\sqrt{p_1'^2(s) + p_2'^2(s)}} \begin{bmatrix} p'_1(s) & -p'_2(s) & 0 \\ p'_2(s) & p'_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{p_1'^2(s) + p_2'^2(s)} \end{bmatrix} \quad .\end{aligned}\tag{8.12}$$

OPGAVE 8.11. Lad $p(s)$ betegne følgende cirkel:

$$p(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (2 \cos(s/2), 2 \sin(s/2), 1) \quad ,\tag{8.13}$$

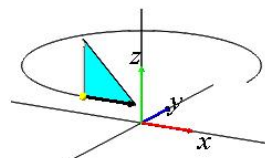
hvor $s \in [0, 4\pi]$.

1. Vis, at $p(s)$ er enhedsfart-parametriseret.
2. Bestem $\mathbf{R}(s)$ således at tetraederet $\boxtimes(s) = \mathbf{R}(s) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(s)$ udfører en lodret styret bevægelse langs $p(s)$. Se figur 8.2

OPGAVE 8.12. Lad $p(s)$ betegne følgende helix (se figur 8.3):

$$p(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (\cos(s/\sqrt{2}), \sin(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2}) \quad ,\tag{8.14}$$

hvor $s \in [0, 2\sqrt{2}\pi]$.



Figur 8.2: Lodret styret transport langs cirkel, se opgave 8.11. Animeret.

1. Vis, at $p(s)$ er enhedsfart parametriseret.
2. Bestem $\mathbf{R}(s)$ således at tetraederet $\boxtimes(s) = \mathbf{R}(s) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(s)$ udfører en lodret styret bevægelse langs $p(s)$.

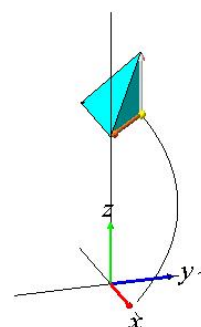
OPGAVE 8.13. Bemærk, at en af kantvektorerne i det markerende treben for det bevægede tetraeder i figur 8.3, som er baseret på ovenstående opgave 8.12, har et spidspunkt, der ser ud til at bevæge sig langs z -aksen. Vis, at den observation er korrekt, og bestem farten af den bevægelse af det punkt.

8.3 Frenet-Serret styring af basistetraeder

I ethvert punkt $p(s)$ på en kurve med enhedsfart-parametrisering vil vi nu opbygge et tetraeder, der igen skal være en roteret (og derefter parallelforskudt) kopi af basistetraederet. Men fodpunktskurven får nu total indflydelse på styringen.

Definition 8.14. Det såkaldte *Frenet-Serret treben*

$$\boxtimes(s) = \boxtimes(p(s), \mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)) \quad (8.15)$$



Figur 8.3: Lodret styret transport langs 'lodret' helix, se opgave 8.12. Animeret.

er defineret ved kantvektorerne nedenfor under forudsætning af, at

$$\begin{aligned} \|\mathbf{p}'(s)\| &= 1 \quad \text{for alle } s \text{ (dvs. enhedsfart)} \\ \|\mathbf{p}''(s)\| &= \kappa(s) > 0 \quad \text{for alle } s \text{ (dvs. accelerationen er aldrig 0)} \end{aligned} \quad (8.16)$$

Hvis de betingelser er opfyldte, så definerer vi Frenet-Serret trebenet ved at definere kantvektorerne:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &= \mathbf{p}'(s) \quad (\text{som har længde 1}) \\ \mathbf{f}(s) &= \frac{\mathbf{e}'(s)}{\|\mathbf{e}'(s)\|} = \frac{\mathbf{e}'(s)}{\kappa(s)} = \frac{\mathbf{p}''(s)}{\kappa(s)} \quad (\text{NB: } \kappa(s) \neq 0) \\ \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) \quad . \end{aligned} \quad (8.17)$$

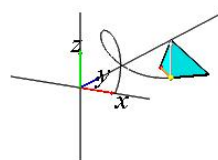
8.3.1 Krumning

Vi noterer her, at accelerationsfunktionen $\kappa(s_0) = \|\mathbf{p}''(s_0)\|$ er et geometrisk mål for den lokale krumning eller bøjning af kurven $p(s)$ på stedet $p(s_0)$:

Definition 8.15. Lad $p(s)$ betegne en kurve i rummet, som er parametriseret med enheds-fart. Værdien $\kappa(s_0)$ kaldes *krumningen af kurven* i punktet $p(s_0)$.

At dette er en rimelig definition følger af konklusionen på følgende opgave:

OPGAVE 8.16. Bestem krumningen $\kappa(s)$ (for enhver værdi af s) for de enhedsfart-parametriserede kurver, som blev defineret (for enhver værdi af $a \neq 0$) i opgave 8.8.



Figur 8.4: Lodret styret transport langs 'vandret' helix. Animeret.

OPGAVE 8.17. Bestem krumningsfunktionen $\kappa(s)$ for kurven i opgave 8.12.

OPGAVE 8.18. Bestem krumningsfunktionen $\kappa(s)$ for den kurve, der har t -parametriseringen

$$p(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{3/2}, \frac{1}{3}(1-t)^{3/2}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \quad , \quad (8.18)$$

hvor $t \in]-1, 1[$. Vink: Se opgave 8.9.

8.3.2 Frenet–Serret trebenet er veldefineret

Bemærk, at per definition af accelerations- og krumnings-funktionen $\kappa(s)$ følger det af definitionen i (8.17), at $\mathbf{f}(s)$ - ligesom $\mathbf{e}(s)$ - har konstant længde 1. Desuden er $\mathbf{f}(s)$ altid vinkelret på

$\mathbf{e}(s)$. Det følger af, at

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}(s)\| &= 1 && \text{således at} \\
 \|\mathbf{e}(s)\|^2 &= 1 && \text{dvs. at} \\
 \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s) &= 1 && \text{sådan at} \\
 \frac{d}{ds}(\mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}(s)) &= 0 && (8.19) \\
 \mathbf{e}'(s) \cdot \mathbf{e}(s) + \mathbf{e}(s) \cdot \mathbf{e}'(s) &= 0 \\
 2\mathbf{e}'(s) \cdot \mathbf{e}(s) &= 0 \\
 2\kappa(s)\mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{e}(s) &= 0 \\
 \mathbf{f}(s) \cdot \mathbf{e}(s) &= 0 && \text{fordi } \kappa(s) > 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

Til sidst følger så, at $\mathbf{g}(s)$ også har konstant længde 1 (hvorfor det?). Alt i alt har vi dermed et veldefineret treben i ethvert punkt $p(s)$ og trebenet er en roteret (og derefter parallelforskudt) kopi af standard basis-tetraederet:

$$\begin{aligned}
 \boxtimes(s) &= \boxtimes(p(s), \mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)) \\
 &= \mathbf{R}(s) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(s) \quad ,
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

hvor rotationsmatricen $\mathbf{R}(s)$ nu er givet ved Frenet–Serret kantvektorerne:

$$\mathbf{R}(s) = [\mathbf{e}^*(s) \mathbf{f}^*(s) \mathbf{g}^*(s)] \quad , \tag{8.21}$$

jævnfør (7.32) fra kapitel 7.

Eksempel 8.19. Vi lader $p(s)$ betegne følgende kurve - en cirkel med radius $a > 0$ i (x, y) -planen - som er parametriseret med enhedsfart:

$$p(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (a \cos(s/a), a \sin(s/a), 0) \quad . \tag{8.22}$$

Så har vi følgende ingredienser til konstruktion af Frenet–Serret trebenet og til analyse af trebenets

rotation (herunder den skævsymmetriske akse-matrix $\mathbf{\Omega}(s)$ og den associerede akse-vektor $\mathbf{\omega}(s)$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}(s) &= \mathbf{p}'(s) = (-\sin(s/a), \cos(s/a), 0) \\
 \mathbf{p}''(s) &= (-\frac{1}{a}\cos(s/a), -\frac{1}{a}\sin(s/a), 0) \\
 \kappa(s) &= \|\mathbf{p}''(s)\| = \frac{1}{a} \\
 \mathbf{f}(s) &= \frac{\mathbf{p}''(s)}{\kappa(s)} = -(\cos(s/a), \sin(s/a), 0) \\
 \mathbf{g}(s) &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s) = (0, 0, 1) \\
 \mathbf{R}(s) &= \begin{bmatrix} -\sin(s/a) & -\cos(s/a) & 0 \\ \cos(s/a) & -\sin(s/a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{R}'(s) &= \begin{bmatrix} -\cos(s/a)/a & \sin(s/a)/a & 0 \\ -\sin(s/a)/a & -\cos(s/a)/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{\Omega}(s) &= \mathbf{R}'(s)\mathbf{R}^*(s) = \begin{bmatrix} 0 & -1/a & 0 \\ 1/a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{\omega}(s) &= (0, 0, 1/a) \quad .
 \end{aligned} \tag{8.23}$$

OPGAVE 8.20. Lad $p(s)$ betegne følgende cirkel, jvf. opgave 8.11:

$$p(s) = (p_1(s), p_2(s), p_3(s)) = (2\cos(s/2), 2\sin(s/2), 1) \quad , \tag{8.24}$$

hvor $s \in [0, 4\pi]$. Vis, at den lodret styrede bevægelse af basistetraederet (som fundet i opgave 8.11 og vist i figur 8.2) er præcis den samme som Frenet–Serret styringen af basistetraederet langs den givne cirkel.

8.3.3 Torsion

I ethvert punkt $p(s_0)$ på en given enhedsfart-kurve $p(s)$ (med krumning $\kappa(s) > 0$) har vi ovenfor konstrueret Frenet-Serret trebenet med kantvektorerne $\mathbf{e}(s_0)$, $\mathbf{f}(s_0)$, og $\mathbf{g}(s_0)$. Enhver vektor kan opløses efter disse tre ortogonale enhedsvektorer og udtrykkes som en kombination af dem. Det gælder specielt for hver af de tre vektorer, der er de s -afledede af vektor-funktionerne $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ i punktet $p(s_0)$, dvs. de tre vektorer $\mathbf{e}'(s_0)$, $\mathbf{f}'(s_0)$, og $\mathbf{g}'(s_0)$.

Det vil sige, at der for ethvert punkt på kurven, altså for enhver værdi af s , findes en matrix $\mathbf{\Xi}(s)$, som opfylder at:

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{e}'^*(s) \mathbf{f}'^*(s) \mathbf{g}'^*(s)] &= [\mathbf{e}^*(s) \mathbf{f}^*(s) \mathbf{g}^*(s)] \mathbf{\Xi}(s) \\
 \mathbf{R}'(s) &= \mathbf{R}(s) \mathbf{\Xi}(s) \quad .
 \end{aligned} \tag{8.25}$$

De ligninger er ækvivalente med

$$\mathbf{e}'(s) = \xi_{11}(s)\mathbf{e}(s) + \xi_{21}(s)\mathbf{f}(s) + \xi_{31}(s)\mathbf{g}(s) \quad \text{og tilsvarende for } \mathbf{f}'(s) \text{ og } \mathbf{g}'(s) \quad , \quad (8.26)$$

hvor $\xi_{ij}(s)$ er de enkelte element-funktioner i (koefficient-)matricen $\Xi(s)$.

Men hvilke elementer er der så tale om? For det første: Matricen $\Xi(s)$ er (ligesom $\Omega(s)$) *skævsymmetrisk* for alle s . Fra ligning (8.25) aflæser vi nemlig ved hjælp af (7.26) og definitionen af $\Omega(s)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^*(s)\mathbf{R}'(s) &= \Xi(s) \\ \mathbf{R}^*(s)\Omega(s)\mathbf{R}(s) &= \Xi(s) \end{aligned} \quad (8.27)$$

og da $\Omega(s)$ er skævsymmetrisk får vi 'foræret' skævsymmetrien af $\Xi(s)$ således:

$$\begin{aligned} \Xi^*(s) &= (\mathbf{R}^*(s)\Omega(s)\mathbf{R}(s))^* \\ &= \mathbf{R}^*(s)\Omega^*(s)\mathbf{R}^{**}(s) \\ &= \mathbf{R}^*(s)(-\Omega(s))\mathbf{R}(s) \\ &= -\mathbf{R}^*(s)\Omega(s)\mathbf{R}(s) \\ &= -\Xi(s) \quad . \end{aligned} \quad (8.28)$$

Vi har derfor foreløbig, at $\Xi(s)$ er bestemt ved kun 3 elementfunktioner, for eksempel $\xi_{12}(s)$, $\xi_{13}(s)$, og $\xi_{23}(s)$ (de andre elementer følger så via skævsymmetrien).

Vi kender to af de tre elementfunktioner:

Påstand 8.21.

$$\begin{aligned} \xi_{12}(s) &= -\kappa(s) \quad (\text{krumningen af kurven!}) \\ \xi_{13}(s) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (8.29)$$

Bevis. Den første ligning følger direkte af (8.17) og (8.26) per definition af $\mathbf{f}(s)$:

$$\mathbf{e}'(s) = \kappa(s)\mathbf{f}(s) = \xi_{11}(s)\mathbf{e}(s) + \xi_{21}(s)\mathbf{f}(s) + \xi_{31}(s)\mathbf{g}(s) \quad , \quad (8.30)$$

sådan at $\xi_{21}(s) = \kappa(s)$ og derfor, da $\Xi(s)$ er skævsymmetrisk: $\xi_{12}(s) = -\kappa(s)$.

Den anden ligning fås ved at udregne:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}'(s) &= \xi_{13}(s)\mathbf{e}(s) + \xi_{23}(s)\mathbf{f}(s) + \xi_{33}(s)\mathbf{g}(s) \\ &= \frac{d}{ds}(\mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}(s)) \\ &= \mathbf{e}'(s) \times \mathbf{f}(s) + \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}'(s) \quad \text{se opgave 8.22 nedenfor} \\ &= \kappa(s)\mathbf{f}(s) \times \mathbf{f}(s) + \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}'(s) \\ &= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{f}'(s) \quad , \end{aligned} \quad (8.31)$$

hvoraf det fremgår, at $\mathbf{g}'(s)$ er vinkelret på $\mathbf{e}(s)$ (hvorfor det?) således at $\xi_{13}(s) = 0$ (hvorfor det?). Og det var det, vi påstod. \square

OPGAVE 8.22. Lad $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$ og $\mathbf{b}(t) = (b_1(t), b_2(t), b_3(t))$ betegne to vektorfunktioner i rummet. Vis ved direkte udregning og differentiation af koordinatfunktionerne, at

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}(t)) = \mathbf{a}'(t) \times \mathbf{b}(t) + \mathbf{a}(t) \times \mathbf{b}'(t) \quad . \quad (8.32)$$

Vi har dermed vist, at for en enhedsfart-parametriseret kurve $p(s)$ er

$$\mathfrak{E}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \quad (8.33)$$

for en passende funktion $\tau(s)$. Det er denne funktion vi kalder torsionen af kurven $p(s)$:

Definition 8.23. Lad $p(s)$ betegne en kurve i rummet, som er parametriseret med enheds-fart, og som har overalt positiv krumning $\kappa(s)$. Værdien $\tau(s_0)$ kaldes *torsionen af kurven* i punktet $p(s_0)$.

8.3.4 Opsamling

Sætning 8.24. En enhedsfart-parametriseret positivt krummet kurve $p(s)$ med tilhørende stedvektorfunktion $\mathbf{p}(s)$ har et Frenet–Serret treben med kantvektorer $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{f}(s)$, og $\mathbf{g}(s)$ givet ved definition 8.14.

Disse vektorfunktioner tilfredsstiller følgende ligninger, hvor $\kappa(s)$ betegner kurvens krumning, og $\tau(s)$ betegner kurvens torsion.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(s) &= \kappa(s)\mathbf{f}(s) \\ \mathbf{f}'(s) &= -\kappa(s)\mathbf{e}(s) + \tau(s)\mathbf{g}(s) \\ \mathbf{g}'(s) &= -\tau(s)\mathbf{f}(s) \quad . \end{aligned} \quad (8.34)$$

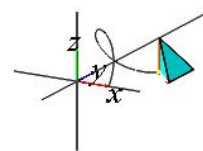
Krumningen og torsionen kan beregnes direkte ud fra ovenstående - eller samtidigt ved at udregne følgende produkt:

$$\mathbf{R}^*(s)\mathbf{R}'(s) = \mathfrak{E}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad (8.35)$$

hvor $\mathbf{R}(s)$ er rotationsmatricen for Frenet–Serret trebenet, jvf. (8.21).

OPGAVE 8.25. Bestem Frenet–serret matricen $\mathfrak{E}(s)$ og torsionen $\tau(s)$ for hver af de cirkler, som betragtes i eksempel 8.19.

OPGAVE 8.26. En helix er givet ved en tidsparametrisering $p(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt)$, $t \in \mathbb{R}$, med tilsvarende stedvektorfunktion $\mathbf{p}(t)$. Konstanten a antages at være forskellig fra 0, men b kan være vilkårlig. Se opgave 8.2 og figur 8.1.



Figur 8.5: Frenet–Serret styret bevægelse af basistetraederet langs 'vandret' helix. Se opgave 8.27. Animeret.

1. Bestem en enhedsfart parametrisering $\boldsymbol{\eta}(s)$ af kurven og brug den i de følgende delopgaver.
2. Bestem Frenet–Serret trebenets kantvektorer $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{f}(s)$, og $\boldsymbol{g}(s)$ for kurven.
3. Bestem den tilhørende rotationsmatrix $\boldsymbol{R}(s)$ for kurven.
4. Bestem akse-matricen $\boldsymbol{\Omega}(s)$ og den associerede akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(s)$ for kurven.
5. Bestem Frenet–Serret matricen $\boldsymbol{\Xi}(s)$ for kurven.

OPGAVE 8.27. Bemærk, at en af kantvektorerne i det markerende treben for det bevægede tetraeder i figur 8.5 har et spidspunkt, der ser ud til at bevæge sig langs y -aksen. Fodpunktskurven for Frenet–Serret bevægelsen af basistetraederet er givet ved forskriften:

$$p(s) = (\cos(s/\sqrt{2}), s/\sqrt{2}, \sin(s/\sqrt{2})) \quad . \quad (8.36)$$

Vis, at den nævnte observation er korrekt for denne specielle vandrette helix, og bestem farten af den bevægelse af det punkt på y -aksen.

Kapitel 9

Medfølgende tetraederrum

I kapitel 7 har vi allerede undersøgt bevægelsen af punkter, der 'følger med' en given bevægelse af et tetraeder - for eksempel spidspunkterne for de tre kantvektorer $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ i det roterede tetraeder. Det roterede tetraeder er givet ved:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}(t) &= \mathbb{T}(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \\ &= \mathbf{R}(t) \mathbb{T}(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(t) \\ \mathbf{R}(t) &= [\mathbf{e}^*(t) \mathbf{f}^*(t) \mathbf{g}^*(t)] \quad ,\end{aligned}\tag{9.1}$$

hvor $\mathbf{R}(t)$ stadig betegner en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt t .

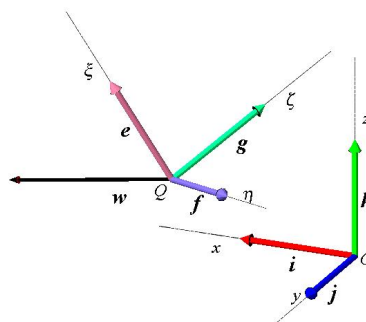
Bemærkning 9.1. Læg mærke til, at vi i dette kapitel igen 'fritstiller' både rotationsmatricen og fodpunktskurven i forhold til hinanden i den forstand, at de ikke nødvendigvis er koblete som i forrige kapitel, hvor tetraederet og dermed $\mathbf{R}(t)$ blev styret direkte ud fra fodpunktskurvens geometri, ligesom selve fodpunktskurven heller ikke her behøver at være udstyret med enhedsfart parametrisering.

9.1 Koordinat- og basis-skift

Et objekt, der er *fast monteret* på - eller i - det bevægede tetraeder $\mathbb{T}(t)$ har til ethvert tidspunkt en position i rummet, som selvsagt er direkte bestemt af tetraederets position i rummet. Positionen er altså direkte bestemt ud fra fodpunktskurven og de tre kantvektorer. Vi skal blot derudover beskrive præcist *hvordan* objektet er nagelfast placeret på - eller i - tetraederet.

Vi betragter et punkt på et fræseværktøj, f.eks. centerpunktet for et kugleformet fræsehoved, som er monteret på enden af en stålaksel, der er fast monteret på tetraederet $\mathbb{T}(t)$ således at akslens andet endepunkt hele tiden er i fodpunktet $p(t)$. Så kan vi repræsentere stålakslen med en vektor $\mathbf{w}(t)$, der til ethvert tidspunkt har fodpunkt i $p(t)$ og spidspunkt i fræsehovedets centerpunkt. Den vektor har faste koordinater i forhold til tetraederet, dvs. i forhold til $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$. Det vil sige, at der findes 3 *konstanter*, \tilde{w}_1 , \tilde{w}_2 , og \tilde{w}_3 således at

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad .\tag{9.2}$$



Figur 9.1: Koordinatsystemerne $\{Q, \xi, \eta, \zeta\}$ og $\{O, x, y, z\}$ med tilhørende basisvektorer $\{e, f, g\}$ og $\{i, j, k\}$ samt en vektor w med fodpunkt i Q .

Det er vigtigt at lægge mærke til, at på grund af den nagelfaste placering af $w(t)$ i $\boxtimes(t)$ så er de tre koordinater \tilde{w}_1 , \tilde{w}_2 , og \tilde{w}_3 konstante, uafhængige af tiden t . Da de tre kantvektorer $e(t)$, $f(t)$, og $g(t)$ til ethvert tidspunkt er ortogonale enhedsvektorer, idet $R(t)$ er en rotationsmatrix, så kan konstanterne findes ved almindelig retvinklet projektion af w på kantvektorerne, altså ved prikprodukterne

$$\begin{aligned} w(t) \cdot e(t) &= (\tilde{w}_1 e(t) + \tilde{w}_2 f(t) + \tilde{w}_3 g(t)) \cdot e(t) = \tilde{w}_1 \\ w(t) \cdot f(t) &= (\tilde{w}_1 e(t) + \tilde{w}_2 f(t) + \tilde{w}_3 g(t)) \cdot f(t) = \tilde{w}_2 \\ w(t) \cdot g(t) &= (\tilde{w}_1 e(t) + \tilde{w}_2 f(t) + \tilde{w}_3 g(t)) \cdot g(t) = \tilde{w}_3 \end{aligned} \quad (9.3)$$

Vektoren w har i den forstand *koordinaterne* $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ med hensyn til de nye *basisvektorer* $e(t)$, $f(t)$, og $g(t)$. Og med opstillingen ovenfor er w stedvektor ud fra fodpunktet $p(t)$ til det spidspunkt der er givet ved centret af fræsehovedet. Til ethvert tidspunkt t har vi dermed defineret et **nyt koordinatsystem**, $\{Q, \xi, \eta, \zeta\}$ med de nye basisvektorer i akseretningerne $\{e, f, g\}$, se figur 9.1.

Herefter kan vi ikke bare skrive en vektors koordinater således $w = (1, 2, 7)$ uden at præcisere hvilket koordinatsystem der refereres til. Hvis helt generelt $w = \tilde{w}_1 e + \tilde{w}_2 f + \tilde{w}_3 g$, så har w koordinaterne $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ med hensyn til den nye basis $\{e, f, g\}$ og det er sædvanligvis ikke

koordinaterne for \mathbf{w} med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$.

Med hensyn til den gamle basis har vi stadigvæk koordinaterne (uden \sim) (w_1, w_2, w_3) for \mathbf{w} :

$$\mathbf{w} = w_1 \mathbf{i} + w_2 \mathbf{j} + w_3 \mathbf{k} \quad . \quad (9.4)$$

Vi bliver således nødt til at markere, hvilken basis vi bruger når vi skriver og bruger koordinater for vektorer. Det gør vi med G for gammel og N for ny:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \tilde{w}_1 \mathbf{e} + \tilde{w}_2 \mathbf{f} + \tilde{w}_3 \mathbf{g} = (\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)_N \\ \mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1 \mathbf{e}^* + \tilde{w}_2 \mathbf{f}^* + \tilde{w}_3 \mathbf{g}^* = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \\ \mathbf{w} &= w_1 \mathbf{i} + w_2 \mathbf{j} + w_3 \mathbf{k} = (w_1, w_2, w_3)_G \\ \mathbf{w}^* &= w_1 \mathbf{i}^* + w_2 \mathbf{j}^* + w_3 \mathbf{k}^* = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G \quad . \end{aligned} \quad (9.5)$$

Vi vil nu finde sammenhængen mellem de to koordinatsæt. Vi bruger, at \mathbf{e} er den vektor, der med hensyn til den gamle basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ har præcis de koordinater som står i rotationsmatricens første søjle, og tilsvarende for \mathbf{f} og \mathbf{g} :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^* &= \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{f}^* &= \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{g}^* &= \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \quad . \end{aligned} \quad (9.6)$$

Ved indsættelse i (9.5) får vi så:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{w}^* &= \tilde{w}_1 \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_2 \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}_G + \tilde{w}_3 \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}_G \\
 &= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N \\
 &= \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G,
 \end{aligned} \tag{9.7}$$

hvor det sidste lighedstegn stammer direkte fra sidste ligning i (9.5).

Vi har derfor følgende generelle sammenhæng mellem de to koordinatsæt for samme vektor \mathbf{w} udtrykt i de to baser:

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G. \tag{9.8}$$

Bemærkning 9.2. Læg mærke til, at vi har brugt både tilde og index N til at markere nye koordinater og ingen tilde sammen med index G til at markere gamle koordinater. Resultatet er så, at de gamle koordinater for en vektor \mathbf{w} kan bestemmes ved at gange \mathbf{R} -matricen på de nye koordinater for \mathbf{w} . Bemærk også, at der jo stadigvæk i \mathbf{R} -matricen står de gamle koordinater for de nye basis-vektorer! Prøv for eksempel at finde de gamle koordinater for den nye første basis-vektor, der jo har de nye koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3) = (1, 0, 0)_N$.

Omvendt har vi også direkte fra (9.8) ved at gange med $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^*$ på begge sider af lighedstegnet:

$$\begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_N = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}_G^* \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}_G. \tag{9.9}$$

OPGAVE 9.3. Lad \mathbf{R} betegne rotationsmatricen $\mathbf{R}_z(t_0)$ for en fast valgt værdi af $t_0 \in \mathbb{R}$ og lad $N = \{\mathbf{e}(t_0), \mathbf{f}(t_0), \mathbf{g}(t_0)\}$ betegne den dertil hørende nye basis.

1. Bestem de nye koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ for de vektorer \mathbf{w} , der har de gamle koordinater (med hensyn til $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$) henholdsvis: $(1, 0, 0)_G$, $(0, 1, 0)_G$, $(0, 0, 1)_G$, og $(1, 2, 3)_G$.
2. Bestem de gamle koordinater for de vektorer \mathbf{w} , der har de nye koordinater henholdsvis: $(1, 0, 0)_N$, $(0, 1, 0)_N$, $(0, 0, 1)_N$, og $(1, 2, 3)_N$.

9.2 Hastighedsfelt

Vi betragter nu igen (ligesom i kapitel 7, afsnit 7.5) et punkt $q(t)$, der bevæger sig sammen med tetraederet

$$\begin{aligned}\boxtimes(t) &= \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(t) \\ &= \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad ,\end{aligned}\tag{9.10}$$

idet vi her dog *ikke vil indskrænke os* til kun at betragte hjørnepunkterne i tetraederet.

Vi betragter altså nu et vilkårligt punkt, $q(t)$ som er fast i forhold til tetraederet og som derfor har faste tidsafhængige koordinater med hensyn til det nye koordinatsystem. Det vil sige, at stedvektoren $\mathbf{q}(t)$ fra Origo O i det gamle koordinatsystem til punktet $q(t)$ er summen:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t) \quad ,\tag{9.11}$$

hvor $\mathbf{p}(t)$ (som tidligere) er vektoren fra O til det nye koordinatsystems Origo $Q(t) = p(t)$, og hvor $\mathbf{w}(t)$ er vektoren fra $p(t)$ til $q(t)$. Den sidstnævnte har så *faste tidsafhængige koordinater* $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ med hensyn til den nye basis $\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) = \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad ,\tag{9.12}$$

således at

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad .\tag{9.13}$$

Punktet $q(t)$ bevæger sig ikke i det medfølgende nye koordinatsystem hvor det har konstante koordinater, men $q(t)$ bevæger sig (muligvis) i det faste gamle koordinatsystem.

Vi vil undersøge hastigheden af den bevægelse til ethvert tidspunkt i det faste gamle koordinatsystem:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}'(t) &= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}'(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}'(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}'(t) \\ &= \mathbf{p}'(t) + \tilde{w}_1 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{g}(t) \\ &= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_1 \mathbf{e}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_2 \mathbf{f}(t)) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\tilde{w}_3 \mathbf{g}(t)) \\ &= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{w}(t) \\ &= \mathbf{p}'(t) + \boldsymbol{\omega}(t) \times (\mathbf{q}(t) - \mathbf{p}(t)) \quad ,\end{aligned}\tag{9.14}$$

hvor vi har benyttet (7.35) fra kapitel 7 og den til $\mathbf{R}(t)$ hørende aksevektor $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Da valget af det faste punkt $q(t)$ i det medfølgende nye koordinatsystem var helt generelt og givet ved punktets faste koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)$ i det nye system, så kan vi nu ved hjælp af (9.14) til ethvert tidspunkt bestemme den øjeblikkelige hastighed af *ethvert punkt*, der er fast monteret i det rum, der følger med tetraederet. Vi skal blot kende punktets faste koordinatsæt i dette medfølgende **tetraeder-rum** samt fodpunktets hastighedsvektor $\mathbf{p}'(t)$ og rotationsmatricens øjeblikkelige akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Med andre ord kender vi nu bevægelsen ikke blot af selve tetraederet $\boxtimes(t)$ og dets hjørnepunkter, men også bevægelsen af ethvert punkt i hele det rum, der er fast monteret på tetraederet.

Vi har dermed:

Sætning 9.4. *Lad $\boxtimes(t)$ betegne en bevægelse af et tetraeder:*

$$\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + \mathbf{p}(t) = \boxtimes(\mathbf{p}(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \quad (9.15)$$

hvor $\mathbf{R}(t)$ angiver en rotationsmatrix til ethvert tidspunkt t med tilhørende akse-vektor $\boldsymbol{\omega}(t)$. Det til denne bevægelse hørende *øjeblikkelige hastighedsfelt* til tidspunktet t_0 er så givet ved følgende vektor i det punkt, der har stedvektoren \mathbf{q} (ud fra det gamle faste Origo, O):

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{w}(t_0) \\ &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \end{aligned} \quad (9.16)$$

Bemærkning 9.5. Med andre ord: Til ethvert tidspunkt og til ethvert givet punkt i rummet har vi dermed knyttet en vektor, nemlig den hastighed som punktet på det tidspunkt har hvis det følger fast med i hele tetraeder-rummets bevægelse, sådan som den bevægelse er fastlagt af $\boxtimes(t)$.

Eksempel 9.6. En roterende bevægelse af et standard tetraeder er givet ved en parametriseret fodpunktskurve (en cirkel) og en rotationsmatrix, der er produkt af to akserotationsmatricer som følger, parameteren er $t \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_z(t) \mathbf{R}_x(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \cos(t) & \sin^2(t) \\ \sin(t) & \cos^2(t) & -\sin(t) \cos(t) \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\ \boldsymbol{\Omega}(t) &= \mathbf{R}'(t) \mathbf{R}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \sin(t) \\ 1 & 0 & -\cos(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) & 0 \end{bmatrix}_G \\ \boldsymbol{\omega}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 1)_G \quad . \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ud fra disse ingredienser finder vi det øjeblikkelige hastighedsfelt for tetraederrummets punkter $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)_G$ se opgave 9.7:

$$\mathbf{V}_q(t) = (-q_2 + (q_3 - 1) \sin(t), q_1 - (q_3 - 1) \cos(t), (q_2 - \sin(t)) \cos(t) - (q_1 - \cos(t)) \sin(t))_G .$$

Se figur 9.2, hvor hastighedsfeltet (og tetraeder-bevægelsen) er vist i animation over det givne t -interval.

OPGAVE 9.7. Eftersis de angivne udtryk i eksempel 9.6 - især den sidste, dvs. udtrykket for det øjeblikkelige hastighedsfelt for den angivne bevægelse af tetraederrummet.

Figur 9.2: En tetraeder-bevægelse langs en cirkel og det tilhørende øjeblikkelige hastigheds-vektorfelt $\mathbf{V}_q(t_0)$ for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$, se eksempel 9.6. Animeret.

OPGAVE 9.8. Bestem tilsvarende udtryk som i eksempel 9.6, men nu ud fra følgende noget simplere data for bevægelsen af tetraederrummet:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(t) &= (t, t, 1)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) \quad .\end{aligned}\tag{9.18}$$

Der er to hovedtilfælde for det øjeblikkelige hastighedsfelt for en bevægelse af tetraederrummet til et givet tidspunkt t_0 . Det afgørende er, om akse-vektoren $\boldsymbol{\omega}(t_0)$ er nul-vektoren eller ikke:

9.2.1 Øjeblikkelig parallelforskydning

Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{0}$ er hastighedsfeltet simpelthen ifølge (9.16):

$$\mathbf{V}_q(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) \quad ,\tag{9.19}$$

således at *alle* punkter q i hele rummet har *samme* hastighedsvektor til det betragtede tidspunkt t_0 . Der er altså tale om en **øjeblikkelig parallelforskydning** (**øjeblikkelig translation**) i den retning og med den fart, som er givet ved tetraederfodpunktets hastighed $\mathbf{p}'(t_0)$ til det tidspunkt. Hvis specielt $\mathbf{p}'(t_0) = \mathbf{0}$ siger vi, at alle punkter i hele rummet er i **øjeblikkelig hvile** til tidspunktet t_0 .

9.2.2 Øjeblikkelig skrue-bevægelse

Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) \neq \mathbf{0}$ kan vi definere en ret linje i rummet med retningsvektor $\boldsymbol{\omega}/\|\boldsymbol{\omega}\|$ på følgende måde, hvor parameteren er u og \mathbf{r}_0 er et punkt på linjen:

$$\mathcal{L} : \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \quad (9.20)$$

Sætning 9.9. En bevægelse af tetraederrummet hørende til $\boxtimes(t) = \mathbf{R}(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + p(t)$ som ovenfor med tilhørende konstant akse-vektor $\boldsymbol{\omega}$ og en fodpunktsbevægelse med konstant hastighedsvektor $h\boldsymbol{\omega}$ på linjen \mathcal{L} :

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + ht\boldsymbol{\omega} \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R} \quad , \quad (9.21)$$

giver anledning til følgende hastighedsfelt i rummet:

$$\mathbf{V}_q = h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}(0)) \quad . \quad (9.22)$$

Bevis. Vi indsætter $\mathbf{p}(t) = \mathbf{r}_0 + ht\boldsymbol{\omega}$ i (9.16) og får som ønsket

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0 - ht_0\boldsymbol{\omega}) \\ &= h\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{q} - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \quad (9.23)$$

□

Definition 9.10. Enhver bevægelse af et tetraederrum, der giver anledning til et hastighedsfelt af formen (9.22) vil vi kalde en *skrue-bevægelse* med den rette linje \mathcal{L} som *skrue-akse*, *vinkel-hastighed* $\|\boldsymbol{\omega}\|$ og *reduceret skrue-højde (pitch)* h .

De betegnelser er helt rimelige. Lad os se på et eksempel:

Eksempel 9.11. Med udgangspunkt i akserotationsmatricen $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_z(t)$, der har tilhørende akse-vektor $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)_G$, og ved valg af fodpunktskurven $p(t) = (0, 0, ht)_G$, hvor h er en konstant, får vi

$$\begin{aligned} \boxtimes(t) &= \mathbf{R}_z(t) \boxtimes (O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) + (0, 0, ht)_G \\ &= \boxtimes((0, 0, ht)_G, \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)) \quad , \end{aligned} \quad (9.24)$$

hvor

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= (0, 0, 1)_G \\ &= \mathbf{e}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)_G \\ &= \mathbf{f}(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)_G. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Hvis vi nu betragter et punkt $q(t)$ med faste koordinater $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3)_N$ i det bevægede tetraeder-system får vi stedvektoren $\mathbf{q}(t)$ fra O til $q(t)$:

$$\mathbf{q}(t) = (0, 0, ht)_G + \tilde{w}_1\mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2\mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3\mathbf{g}(t) \quad , \quad (9.26)$$

således at

$$\mathbf{q}^*(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \tilde{w}_2 \\ \tilde{w}_3 \end{bmatrix}_G + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ht \end{bmatrix}_G . \quad (9.27)$$

Dette er en rotation med vinkel t af vektoren \mathbf{w} omkring z -aksen efterfulgt af en parallelforskydning i z -akseretningen med vektoren $(0, 0, ht)_G$ - altså en skrue-bevægelse. Endnu mere konkret kan vi eksempelvis betragte punktet $(1, 0, 0)_N$ i det medfølgende tetraederrum. Det punkt vil gennemløbe følgende punkter, beskrevet med koordinaterne i det gamle koordinatsystem:

$$\mathbf{q}(t) = (0, 0, ht)_G + \mathbf{e}(t) = (\cos(t), \sin(t), ht)_G \quad , \quad \text{hvor } t \in \mathbb{R} \quad , \quad (9.28)$$

hvilket netop er en parameterfremstilling for en helix - som er højreskruet hvis $h > 0$, venstreskruet hvis $h < 0$ og som er udartet til en cirkel hvis $h = 0$, jvf. opgave 8.2 i kapitel 8.

OPGAVE 9.12. I forlængelse af ovenstående eksempel 9.11: Find de kurver, som gennemløbes af punkterne $(0, 1, 0)_N$, $(0, 0, 1)_N$ og $(1, 2, 3)_N$ i løbet af skruebevægelsen.

Sætning 9.13. Hvis $\boldsymbol{\omega}(t_0) \neq \mathbf{0}$ så findes der til tidspunktet t_0 en entydigt bestemt ret linje $\mathcal{L}(t_0)$ i rummet, nemlig

$$\mathcal{L}(t_0) : \quad \mathbf{r}(u) = \left(\mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} \right) + u \boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad , \quad (9.29)$$

således at den øjeblikkelige bevægelse af tetraederrummet til tidspunktet t_0 er en skrue-bevægelse med $\mathcal{L}(t_0)$ som skrue-akse og med reduceret skruehøjde $h(t_0)$ som er givet ved

$$h(t_0) = \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \cdot \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} . \quad (9.30)$$

Hvis $h(t_0) = 0$ er der tale om en øjeblikkelig drejning omkring akse $\mathcal{L}(t_0)$ til det givne tidspunkt t_0 .

Bevis. Vi skal blot vise, at det øjeblikkelige hastighedsfelt har form som i ligning (9.22). Vi lokaliserer først skrue-aksen i rummet, dvs. vi skal finde et eller flere punkt(er) $q = r$ således at følgende ligning er opfyldt for en passende værdi af $h(t_0)$:

$$\mathbf{V}_r(t_0) = h(t_0) \boldsymbol{\omega}(t_0) . \quad (9.31)$$

Denne ligning er selvfølgelig ækvivalent med

$$h(t_0) \boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) . \quad (9.32)$$

Men den i påstanden angivne værdi af $h(t_0)$ løser netop (9.32): Med præcis den værdi af $h(t_0)$ er alle punkterne $\mathbf{r}(u)$ på linjen $\mathcal{L}(t_0)$ løsninger til (9.32). Se opgave 9.14 nedenfor. Vi sætter \mathbf{r}_0 til at være det udpegede punkt

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}(t_0) + \frac{\boldsymbol{\omega}(t_0) \times \mathbf{p}'(t_0)}{\|\boldsymbol{\omega}(t_0)\|^2} , \quad (9.33)$$

sådan at

$$\mathcal{L}(t_0) : \mathbf{r}(u) = \mathbf{r}_0 + u\boldsymbol{\omega}(t_0) \quad , \quad \text{hvor } u \in \mathbb{R} \quad . \quad (9.34)$$

Med det \mathbf{r}_0 har vi så også (per konstruktion) (9.32) opfyldt:

$$h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad . \quad (9.35)$$

Heraf får vi

$$\mathbf{p}'(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \quad , \quad (9.36)$$

som ved indsættelse i (9.16) giver

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_q(t_0) &= \mathbf{p}'(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= (h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) - \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0))) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{r}_0 - \mathbf{p}(t_0)) \\ &= h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad . \end{aligned} \quad (9.37)$$

Det vil sige, at vi sluttelig har følgende øjeblikkelige hastighedsfelt for den betragtede bevægelse:

$$\mathbf{V}_q(t_0) = h(t_0)\boldsymbol{\omega}(t_0) + \boldsymbol{\omega}(t_0) \times (\mathbf{q}(t_0) - \mathbf{r}_0) \quad , \quad (9.38)$$

og det er netop i henhold til definition 9.10 en **øjeblikkelig skruebevægelse** omkring den påståede akse. Skruebevægelsen reducerer specielt til en **øjeblikkelig drejning** hvis $h(t_0) = 0$. \square

OPGAVE 9.14. Vis, at ovenstående intermezzo i beviset for sætning 9.13 er OK, altså at: "Den i påstanden angivne værdi af $h(t_0)$ løser netop (9.32): Med præcis den værdi af $h(t_0)$ er alle punkterne $\mathbf{r}(u)$ på linjen $\mathcal{L}(t_0)$ løsninger til (9.32)."

Eksempel 9.15. En bevægelse af tetraederrummet med de værdier for $p(t)$ og $\mathbf{R}(t)$, som er angivet i eksempel 9.6, har følgende skrue-akse for enhver værdi af t :

$$\mathcal{L}(t) : \mathbf{r}(u) = (\cos(t)/2, \sin(t)/2, 3/2)_G + (u\cos(t), u\sin(t), u)_G \quad , \quad u \in [0, 2\pi] \quad (9.39)$$

med reduceret skruehøjde $h(t) = 0$. Se opgave 9.16 og figurerne 9.3 og 9.4.

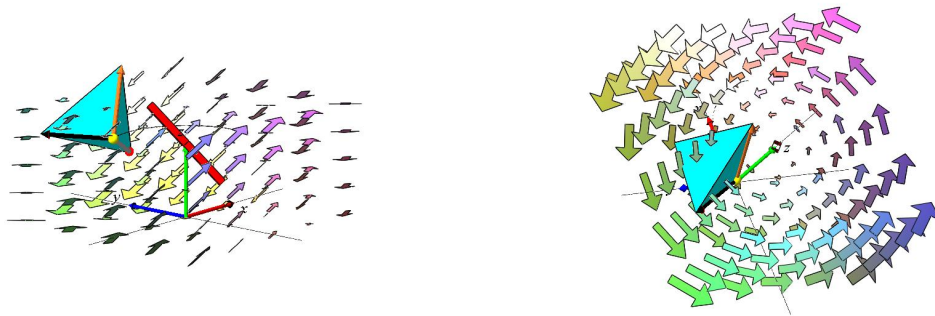
OPGAVE 9.16. Vis, at den påståede skrue-akse i eksempel 9.15 er korrekt for enhver værdi af t , og ellers, at skruehøjden konstant er 0, således at der til ethvert tidspunkt er tale om en øjeblikkelig drejning omkring den øjeblikkelige skrue-akse.

OPGAVE 9.17. Bestem skrue-akse og reduceret skruehøjde for ethvert t i det eksempel, der er defineret i opgave 9.8.

OPGAVE 9.18. Bestem $\boldsymbol{\omega}(t)$, det øjeblikkelige hastighedsfelt, den øjeblikkelige skrueakse, og den øjeblikkelige reducerede skruehøjde for enhver værdi af $t \in \mathbb{R}$ ud fra følgende data for en bevægelse af tetraederrummet:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (\cos(t), \sin(t), 0)_G \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_x(2t) \quad . \end{aligned} \quad (9.40)$$

Figur 9.3: Tetraeder-bevægelse langs cirkel, den tilhørende øjeblikkelige skrue-akse samt hastighedsfeltet for enhver værdi af $t \in [0, 2\pi]$, se eksempel 9.15. Animeret.



Figur 9.4: Snapshot fra figur 9.3 samt det tilsvarende view langs den øjeblikkelige skrue-akse, se eksempel 9.15.

Kapitel 10

Formning via 'sweeping'

Ved hjælp af tetraederrummets bevægelse - med foreskrevne fodpunktskurve og rotation - kan vi nu designe kurver, flader og rumlige områder ved at vælge en figur, f.eks. et punkt, en kurve, eller en flade, som er givet (eventuelt i afhængighed af tiden t) i tetraederrummet, og dernæst betragte den punktmængde, som i det faste koordinatsystem 'fejles ud' af den valgte figur når tetraederrummet udfører den givne bevægelse.

Det vil sige, at vi på den måde har mulighed for at konstruere og analysere en lang række af flader og områder i rummet ved at betragte dem som **ekstruderede objekter**, som formes ud fra simple, let beskrivelige objekter med lavere dimension, ved at disse 'trækkes' igennem rummet med en tetraeder-bevægelse givet ved en fodpunktskurve $p(t)$ og en rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$. I dette kapitel vil vi se på nogle få konstruktioner af denne type. Der fokuseres mest på selve konstruktionen og formgivningen. Den egentlige geometriske analyse af de resulterende objekter nøjes vi med at antyde.

10.1 Kurver

Eksempel 10.1. Hvis vi betragter punktet $q(t)$ med stedvektorfunktionen $\mathbf{q}(t)$ fra det gamle origo O som i 9.2, ligning (9.11), så gennemløber dette punkt i det gamle koordinatsystem en kurve, som er givet ved stedvektoren fra O som funktion af tiden t , jvf. (9.13):

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) + \tilde{w}_1 \mathbf{e}(t) + \tilde{w}_2 \mathbf{f}(t) + \tilde{w}_3 \mathbf{g}(t) \quad , \quad (10.1)$$

hvor \tilde{w}_1 , \tilde{w}_2 , og \tilde{w}_3 betegner de (i dette tilfælde) faste koordinater for stedvektoren $\mathbf{w}(t)$ fra det nye Origo $Q = p(t)$ til punktet $q(t)$ med hensyn til de nye basisvektorer $\{\mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$.

Nogle naturlige første spørgsmål er nu, med reference til ovenstående eksempel: Hvor lang er kurven, hvad er krumningen og torsionen af kurven, og hvordan afhænger kurven og disse størrelser af de ingredienser, den er konstrueret ud fra, altså i dette tilfælde $p(t)$, $\mathbf{R}(t)$, og $\mathbf{w}(t)$?

10.2 Længde af en kurve

Definition 10.2. *Længden af en kurve* \mathcal{K} med parameterfremstilling

$$\mathcal{K} : \mathbf{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))_G, \quad t \in [0, T] \quad (10.2)$$

er - under forudsætning af, at kurven er regulær, dvs. $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t - givet ved integralet af længden af hastighedsvektoren:

$$L(\mathcal{K}) = \int_0^T \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_0^T \sqrt{(r'_1(t))^2 + (r'_2(t))^2 + (r'_3(t))^2} dt. \quad (10.3)$$

OPGAVE 10.3. Bestem længden af den kurve, der gennemløbes af punktet $q(t)$ som konstrueret i (10.1), når vi vælger henholdsvis:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, t)_G, \quad t \in [0, T] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_z(t), \quad t \in [0, T] \\ \mathbf{w} &= (1, 1, 1)_N \\ T &= \pi \\ \mathbf{q}(t) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t). \end{aligned} \quad (10.4)$$

OPGAVE 10.4. Bestem længden af den hjørne-kurve, der er vist i figur 7.9. NB: Det givne hjørnepunkt har konstante koordinater i det medfølgende tetraederrum. En numerisk værdi af længden med et passende antal decimaler er tilstrækkelig.

OPGAVE 10.5. Bestem de respektive længder af de hjørne-kurve, der er vist i figur 10.4.

Vi kan også beregne længder af kurver, der stammer fra en mere generel konstruktion, hvor punktet $q(t)$ ikke nødvendigvis har faste koordinater i det medfølgende tetraederrum. Vi har allerede set eksempler på sådanne kurver:

OPGAVE 10.6. Bestem de respektive længder af hver af de 3 hjørne-kurver, der er vist i 'tårnet' i figur 10.1, som er konstrueret efter ingredienserne i eksempel 6.7.

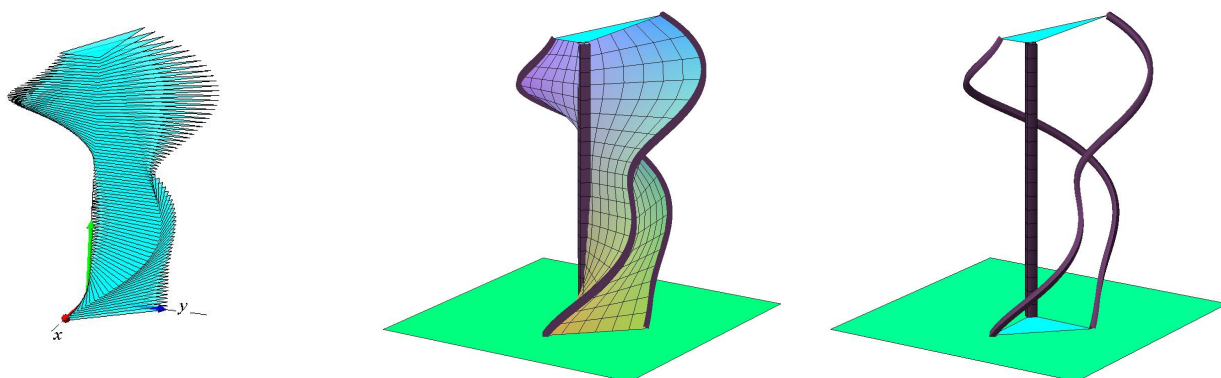
OPGAVE 10.7. Antag, at en given kurve \mathcal{K} er enhedsfart-parametriseret, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, hvor $s \in [0, T]$. Vis, at så er $L(\mathcal{K}) = T$.

10.3 Rumlige områder

På helt tilsvarende måde som for ovenstående konstruktion af kurver kan vi også konstruere flader og rumlige områder ved at vælge figurer, kurver og flader, der til ethvert tidspunkt t er givet i det medfølgende tetraederrum og dernæst undersøge, hvilke objekter, de danner, når tetraederrummet bevæges med foreskrevne fodpunktskurve $p(t)$ og rotationsmatrix $\mathbf{R}(t)$.

I tetraederrummet, som definerer det medfølgende koordinatsystem $\{p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\}$ (jvf. kapitel 9) vil vi til ethvert tidspunkt t definere et **plant område** \mathcal{S}_t og beskrive, hvordan dette plane område bevæges i det gamle koordinatsystem $\{O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, når det følger med den bevægelse af tetraederrummet, som er givet ved $p(t)$ og $\mathbf{R}(t)$.

Specielt udfejer \mathcal{S}_t typisk et rumligt område, og i analogi med længde-beregningen ovenfor for kurver, kan vi tilsvarende finde rumfang og overfladeareal af sådanne områder.



Figur 10.1: Det område i rummet, som 'konstrueres' med trekkanterne $\triangle(t)$ fra eksempel 6.7, idet fodpunktet for hængslerne nu bevæges langs z -aksen og trekkanterne (be-)holdes vandrette, altså parallelle med (x, y) -planen. Bemærk, at de benyttede trekkanter i dette tilfælde *ikke er uforanderlige* i det medfølgende tetraederrum.

Området \mathcal{S}_t defineres i (ξ, η) -planen generelt således:

$$\mathcal{S}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) = (\tilde{w}_1(t, u, v), \tilde{w}_2(t, u, v), 0)_N \quad (10.5)$$

$$t \in [0, T] \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad ,$$

hvor $\tilde{w}_1(t, u, v)$ og $\tilde{w}_2(t, u, v)$ er givne funktioner af tiden t og af de to parametre u og v , som løber i de to parameterintervaller $[a, b]$ og $[c, d]$. Formen af det plane område er (til ethvert tidspunkt)

'bygget ind i' de to funktioner \tilde{w}_1 og \tilde{w}_2 . Bemærk, at vi for så vidt gerne kunne udvide med en funktion $\tilde{w}_3(t, u, v)$ og dermed betragte flader i tetraederrummet, som ikke nødvendigvis er plane. Men her holder vi os til passende simple plane områder i (ξ, η) -planen.

Lad os se på et oplagt eksempel på en velkendt uforanderlig (tiduafhængig) figur i (ξ, η) -planen: En trekant i den plan, som er udspændt af to givne kantvektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} fra det fælles fodpunkt i det nye Origo Q består af de punkter i planen, der har stedvektorerne (fra Q):

$$\mathbf{w}(u, v) = u(\mathbf{a} + v(\mathbf{b} - \mathbf{a})) \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad . \quad (10.6)$$

OPGAVE 10.8. Vis, at denne parametrisering er ækvivalent med den beskrivelse af de indre trekantspunkter, som vi tidligere har benyttet i afsnit 2.2.1 i kapitel 2, nemlig følgende:

$$\mathbf{w} = \alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b} \quad , \quad (10.7)$$

hvor vi der antog, at $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \leq 1$. Vink: Vis først, at $\alpha = u - uv$ og $\beta = uv$.

De to udspændende vektorer \mathbf{a} og \mathbf{b} kan i det nye koordinatsystem skrives som:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, 0)_N \\ \mathbf{b} &= (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, 0)_N \quad , \end{aligned} \quad (10.8)$$

sådan at parameterfremstillingen for det trekantede område kan skrives på formen:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= ((u - uv)\tilde{a}_1 + uv\tilde{b}_1, (u - uv)\tilde{a}_2 + uv\tilde{b}_2)_N \\ u &\in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad , \end{aligned} \quad (10.9)$$

Eksempel 10.9. En uforanderlig rektangel er tilsvarende, og simplere, givet ved

$$\mathcal{R}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) = (u, v, 0)_N \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (10.10)$$

hvor intervallerne $[a, b]$ og $[c, d]$ bestemmer størrelse og placering af rektanglet i (ξ, η) -koordinatsystemet.

Eksempel 10.10. En **uforanderlig cirkelskive** med centrum i $(c_1, c_2, 0)_N$ og radius ρ fås ved brug af polære koordinater:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= (c_1 + u\rho \cos(v), c_2 + u\rho \sin(v), 0)_N \\ u &\in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.11)$$

Eksempel 10.11. En **variabel cirkelskive** med *tidsafhængig centrum* i $(c_1(t), c_2(t), 0)_N$ og *tidsafhængig radius* $\rho(t)$:

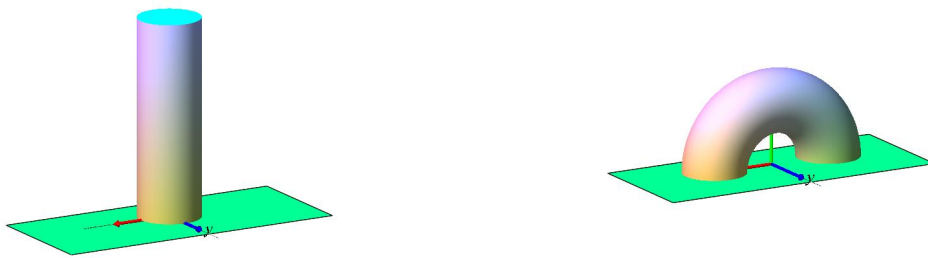
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= (c_1(t) + u\rho(t) \cos(v), c_2(t) + u\rho(t) \sin(v), 0)_N \\ t &\in [0, T] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.12)$$

Eksempel 10.12. En uforanderlig cirkelskive ekstruderes lodret som til venstre i figur 10.2. Ingredienserne til denne konstruktion er med ovenstående notation:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= (0, 0, t)_G, \quad t \in [0, \pi] \\
 R(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \\
 w(t, u, v) &= (u \cos(v)/2, u \sin(v)/2, 0)_N \\
 r(t, u, v) &= p(t) + w(t, u, v) \\
 t &\in [0, \pi], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 2\pi].
 \end{aligned} \tag{10.13}$$

Eksempel 10.13. Den samme cirkelskive som i eksempel 10.12 kan ekstruderes med en roterende bevægelse af tetraederrummet og en tilsvarende cirkulær fodpunktsbevægelse, se figur 10.2 til højre.

$$\begin{aligned}
 p(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G, \quad t \in [0, \pi] \\
 R(t) &= R_y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\
 w(t, u, v) &= (u \cos(v)/2, u \sin(v)/2, 0)_N \\
 r(t, u, v) &= p(t) + w(t, u, v) \\
 t &\in [0, \pi], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 2\pi].
 \end{aligned} \tag{10.14}$$



Figur 10.2: En ekstruderet cirkelskive, dels lodret og dels 'roteret'. Se eksemplerne 10.12 og 10.13.

Eksempel 10.14. En **variabel ellipse-skive** med tidsafhængig centrum i $(c_1(t), c_2(t), 0)_N$ og tidsafhængige halvakser $\rho_1(t)$ og $\rho_2(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t : \quad \mathbf{w}(t, u, v) &= (c_1(t) + u\rho_1(t)\cos(v), c_2(t) + u\rho_2(t)\sin(v), 0)_N \\ t &\in [0, T] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.15)$$

Eksempel 10.15. En lodret ekstrudering af den variable ellipseskive kan konstrueres efter samme model som i eksempel 10.12 - se figur 10.3 til venstre:

$$\begin{aligned} p(t) &= (0, 0, t)_G \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= \frac{1}{2} \left(u \left(\frac{1}{2} + \sin^2(3t) \right) \cos(v), u \left(\frac{1}{2} + \cos^2(3t) \right) \sin(v), 0 \right)_N \\ \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ t &\in [0, \pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.16)$$

Eksempel 10.16. En tilsvarende variabel ellipsedisk ekstruderet med roterende bevægelse af tetraederrummet langs cuirkulær fodpunktskurve - se figur 10.3 til højre:

$$\begin{aligned} p(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G \quad , \quad t \in [0, \pi] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_y(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= \frac{1}{2} \left(u \left(\frac{1}{2} + \sin^2(3t) \right) \cos(v), u \left(\frac{1}{2} + \cos^2(3t) \right) \sin(v), 0 \right)_N \\ \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ t &\in [0, \pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (10.17)$$

10.4 'Sweeping' med trekanter

En uforanderlig trekant i (ξ, η) -planen, som er udspændt af de to specielle kantvektorer $\mathbf{a} = \alpha \mathbf{e}(t)$ og $\mathbf{b} = \beta \mathbf{f}(t)$ fra det fælles fodpunkt i $p(t)$ er som tidligere vist givet ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t, u, v) &= u(\alpha \mathbf{e}(t) + v(\beta \mathbf{f}(t) - \alpha \mathbf{e}(t))) \\ &= u\alpha(1-v)\mathbf{e}(t) + uv\beta \mathbf{f}(t) \\ t &\in [0, T] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad . \end{aligned} \quad (10.18)$$

Det udfejede område i rummet er dernæst:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + u\alpha(1-v)\mathbf{e}(t) + uv\beta \mathbf{f}(t) \\ t &\in [0, T] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \quad . \end{aligned} \quad (10.19)$$



Figur 10.3: Ekstruderet variabel ellipseskive, lodret og med roteret bevægelse af det ekstruderende tetraederrum. Se forskrifterne i eksemplerne 10.15 og 10.16.

Eksempel 10.17. Med $\alpha = 1$ og $\beta = 1$ fås eksempelvis figur 10.4 som er baseret på følgende ingredienser:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= (\cos(t), 0, \sin(t))_G, \quad t \in [0, 1] \\
 \mathbf{R}(t) &= \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 & -\sin(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(t) & 0 & \cos(t) \end{bmatrix}_G \\
 \mathbf{w}(t, u, v) &= (u(1-v), uv, 0)_N \\
 \mathbf{r}(t, u, v) &= (\cos(t) + u(1-v)\cos(t), uv, \sin(t) + u(1-v)\sin(t))_G \\
 t &\in [0, 1], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1].
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

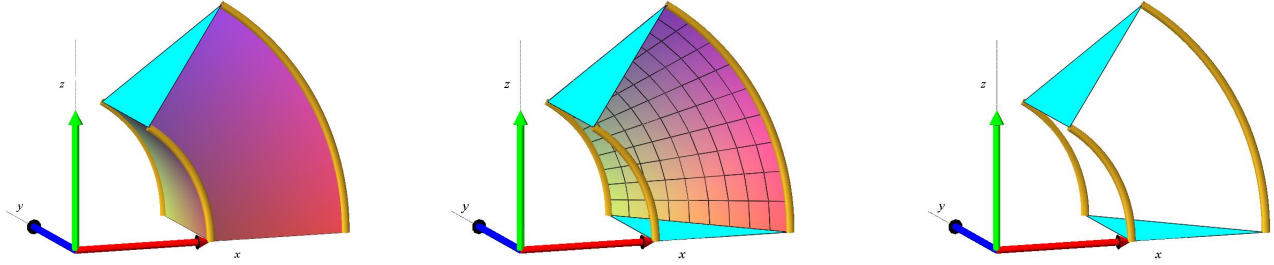
10.5 Rumfang

Et parametriseret **rumligt område** er generelt givet ved en parameterfremstilling

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_{\mathbf{r}} : \quad \mathbf{r}(t, u, v) &= (r_1(t, u, v), r_2(t, u, v), r_3(t, u, v))_G \\
 t &\in [0, T], \quad u \in [a, b], \quad v \in [c, d].
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Definition 10.18. *Rumfanget af det parametriserede område $\mathcal{M}_{\mathbf{r}}$ er så bestemt ved*

$$\text{Rumfang}(\mathcal{M}_{\mathbf{r}}) = \int_0^T \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v) du dv dt, \tag{10.22}$$



Figur 10.4: Ekstrudering med basistrekant ved rotation omkring y -aksen. Se eksempel 10.17.

hvor **Jacobi-funktionen** $\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v)$ er

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v) = |(\mathbf{r}'_u(t, u, v) \times \mathbf{r}'_v(t, u, v)) \cdot \mathbf{r}'_t(t, u, v)| \quad (10.23)$$

Eksempel 10.19. I eksempel 10.17 får vi eksplicit for alle $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$ og for alle t :

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{r}}(t, u, v) = \mathbf{r}'_t(t, u, v) \cdot (\mathbf{r}'_u(t, u, v) \times \mathbf{r}'_v(t, u, v)) = u(1 + u - uv) \quad (10.24)$$

- altså uafhængigt af t .

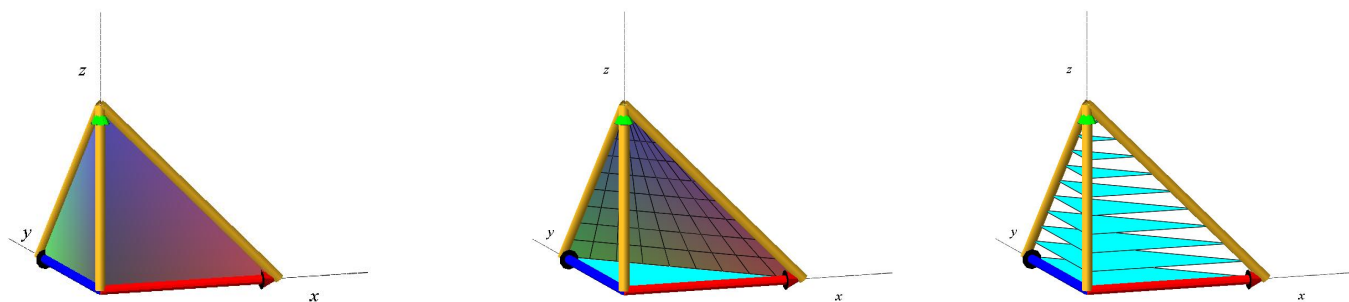
OPGAVE 10.20. Eftersis udtrykket i ligning (10.24) for den påståede Jacobi-funktion.

OPGAVE 10.21. Bestem rumfanget af det område, der er vist i figur 10.4 baseret på eksempel 10.17. Benyt (10.24).

OPGAVE 10.22. Basistetraederet $\boxtimes_0 = \boxtimes(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ er selv et rumligt område, der kan fremstilles ved 'ekstrudering' ud fra et simpelt plant område, i dette tilfælde basis-trekanten, ved en passende simpel tetraeder-bevægelse, som hermed angivet på samme form som ovenfor:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(t) &= (0, 0, t)_G, \quad t \in [0, 1] \\ \mathbf{R}(t) &= \mathbf{E} \\ \mathbf{w}(t, u, v) &= ((1-t)u(1-v), (1-t)uv, 0)_N \\ \mathbf{r}(t, u, v) &= \mathbf{p}(t) + \mathbf{w}(t, u, v) \\ t &\in [0, 1], \quad u \in [0, 1], \quad v \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (10.25)$$

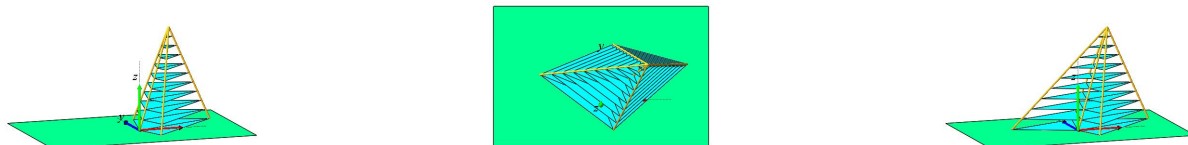
- i) Argumentér for, at denne beskrivelse virkelig *er* en beskrivelse af standard-tetraederet. Se figur 10.5.
- ii) Bestem ved brug af denne beskrivelse og definition 10.18 rumfanget af basis-tetraederet, $\text{Rumfang}(\boxtimes_0)$.



Figur 10.5: Basistetraederet som ekstruderet objekt. Se opgave 10.22.

OPGAVE 10.23. Bestem på tilsvarende måde (a'la opgave 10.22) rumfanget af en vilkårlig **pyramide**. Vink: Opdel først grundpolygonen i trekanter og find rumfanget af pyramider med trekantede grundflader. Se figur 10.6.

OPGAVE 10.24. Beskriv Malmø Turning Torso som en ekstrudering og find rumfanget. Se figur 10.7.



Figur 10.6: Pyramide som ekstruderet objekt ud fra en trianguleret firkant i planen. Se opgave [10.23](#).



Figur 10.7: Turning Torso of Malmø som ekstrudering med 5-kantet basis. Se opgave [10.24](#).

Bilag A

Areal-beregninger

En parametriseret **flade i rummet** er typisk givet ved en parameterfremstilling som følger

$$F_s: \quad \mathbf{s}(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad , \quad (\text{A.1})$$

hvor $s_1(u, v)$, $s_2(u, v)$, og $s_3(u, v)$ er givne funktioner af de to variable u og v .

Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_s(u, v)$ for parameterfremstillingen er her givet ved

$$\text{Jacobi}_s(u, v) = \|\mathbf{s}'_u(u, v) \times \mathbf{s}'_v(u, v)\| \quad , \quad (\text{A.2})$$

dvs. arealet af det parallelogram, der på stedet $\mathbf{s}(u, v)$ udspændes af de to tangentvektorer $\mathbf{s}'_u(u, v)$ og $\mathbf{s}'_v(u, v)$ til de respektive koordinatkurver igennem punktet $\mathbf{s}(u, v)$ på fladen.

Definition A.1. *Parameterfremstillingen (A.1) siges at være en **regulær parameterfremstilling** hvis der gælder følgende:*

$$\text{Jacobi}_s(u, v) > 0 \quad \text{for alle} \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad . \quad (\text{A.3})$$

Definition A.2. ***Areal**et af den parametriserede flade*

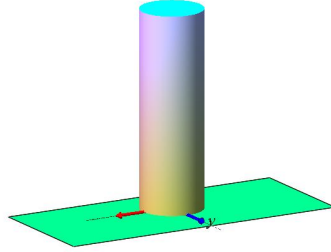
$$F_s: \quad \mathbf{s}(u, v) = (s_1(u, v), s_2(u, v), s_3(u, v)) \quad , \quad u \in [a, b] \quad , \quad v \in [c, d] \quad (\text{A.4})$$

defineres som :

$$\text{Areal}(F_s) = \int_c^d \int_a^b \text{Jacobi}_s(u, v) \, du \, dv \quad . \quad (\text{A.5})$$

Eksempel A.3. Cylinderoverfladen C (uden ende-cirkelskiverne) i figur A.1 har cirkulært tværsnit med radius $1/2$ og højden af cylinderen er π . Så er flade-arealet let at regne ud - det er omkredsen gange højden, altså:

$$\text{Areal}(C) = \pi^2 \quad . \quad (\text{A.6})$$



Figur A.1: En ekstruderet cirkelskive. Se eksemplerne 10.12.

Vi kan beregne det samme resultat ved at bruge den generelle metode. En parameterfremstilling for den massive cylinder, altså det rumlige område er

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= (u \cos(v)/2, u \sin(v)/2, t) \\ t &\in [0, \pi], u \in [0, 1], v \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

hvorfra vi dernæst direkte får en parameterfremstilling for cylinderfladen ved at sætte $u = 1$:

$$\begin{aligned} C : \quad \mathbf{s}(t, v) &= \mathbf{r}(t, 1, v) = (\cos(v)/2, \sin(v)/2, t) \\ t &\in [0, \pi], v \in [0, 2\pi] \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Denne parameterfremstilling har Jacobi-funktionen

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t, v) = 1/2 \quad , \quad (\text{A.9})$$

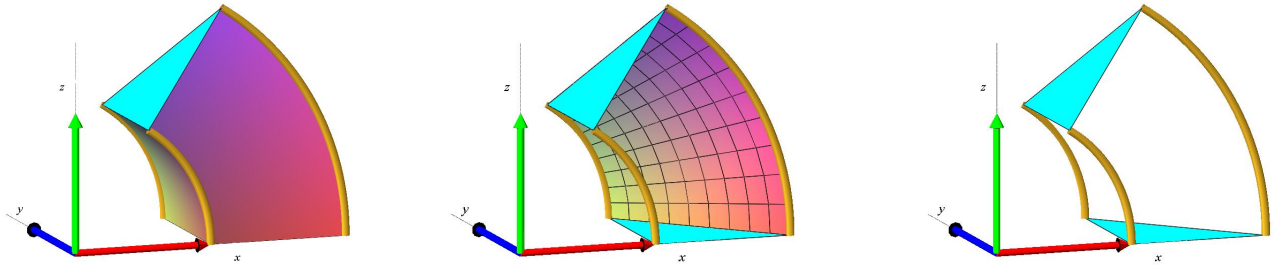
og arealet er derfor:

$$\text{Areal}(C) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t, v) dt dv = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{2} dt dv = \pi^2 \quad , \quad (\text{A.10})$$

i overensstemmelse med den direkte beregning.

Eksempel A.4. I eksempel 10.17 har vi - ud over toppen og bunden, som er standard basis trekanter - tre sideflader \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 , og \mathcal{F}_3 . Deres respektive parameterfremstillinger følger direkte af parameterfremstillingen $\mathbf{r}(t, u, v)$ for det tilsvarende rumlige område:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= (\cos(t) + u(1-v)\cos(t), uv\sin(t) + u(1-v)\sin(t))_G \\ t &\in [0, 1] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 1] \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$



Figur A.2: Se eksempel 10.17.

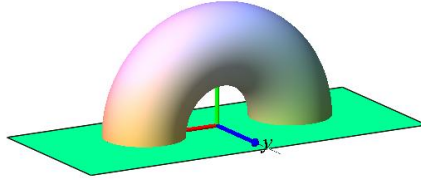
$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_1 : \quad \mathbf{s}_1(t, v) = \mathbf{r}(t, 1, v) &= (\cos(t) + \cos(t)(1 - v), v, \sin(t) + \sin(t)(1 - v)) \\
 t \in [0, 1], v \in [0, 1] \quad , \\
 \mathcal{F}_2 : \quad \mathbf{s}_2(t, u) = \mathbf{r}(t, u, 0) &= (\cos(t)(1 + u), 0, \sin(t)(1 + u)) \\
 t \in [0, 1], u \in [0, 1] \quad , \\
 \mathcal{F}_3 : \quad \mathbf{s}_2(t, u) = \mathbf{r}(t, u, 1) &= (\cos(t), u, \sin(t)) \\
 t \in [0, 1], u \in [0, 1] \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A.12}$$

Det er sidefladen \mathcal{F}_1 , der er vist i figur A.2 i midten. Bemærk, at per konstruktion optræder parameteren t i alle sidefladernes parameterfremstillinger. De respektive Jacobi-funktioner er nu:

$$\begin{aligned}
 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_1}(t, v) &= \sqrt{2}(2 - v) \quad , \\
 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_2}(t, u) &= 1 + u \quad , \\
 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_3}(t, u) &= 1 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A.13}$$

Arealerne er derfor:

$$\begin{aligned}
 \text{Areal}(F_{\mathbf{s}_1}) &= \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_1}(t, v) dt dv = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{2}(2 - v) dt dv = 3/\sqrt{2} \quad , \\
 \text{Areal}(F_{\mathbf{s}_2}) &= \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_2}(t, u) dt du = \int_0^1 \int_0^1 (1 + u) dt du = 3/2 \quad , \\
 \text{Areal}(F_{\mathbf{s}_3}) &= \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}_3}(t, u) dt du = \int_0^1 \int_0^1 1 dt du = 1 \quad .
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$



Figur A.3: Den ekstruderede cirkelskive. Se eksemplerne 10.12 og 10.13.

Eksempel A.5. Den bøjede massive cylinder i figur A.3, som er halvdelen af en **torus**, har parameterfremstillingen fra 10.13:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, u, v) &= (\cos(t)(1 + u \cos(v)/2), u \sin(t) \sin(v), \sin(t)(1 + u \sin(t) \cos(v)/2)) \\ t &\in [0, \pi] \quad , \quad u \in [0, 1] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Heraf fås parameterfremstillingen for den del af overfladen, som ikke er cirkelskive-endeplaner:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \quad : \quad \mathbf{s}(t, v) &= \mathbf{r}(t, 1, v) \\ &= (\cos(t)(1 + \cos(v)/2), \sin(t) \sin(v), \sin(t)(1 + \sin(t) \cos(v)/2)) \\ t &\in [0, \pi] \quad , \quad v \in [0, 2\pi] \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Den tilhørende Jacobi-funktion:

$$\text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t, v) = (2 + \cos(v))/4 \quad , \quad (\text{A.17})$$

således at arealet er

$$\text{Areal}(F_{\mathbf{s}}) = \int_0^1 \int_0^1 \text{Jacobi}_{\mathbf{s}}(t, v) dt dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (2 + \cos(v))/4 dt dv = \pi^2 \quad , \quad (\text{A.18})$$

OPGAVE A.6. Bemærk, at cylinderen i figur A.1 og den bøjede cylinder i figur A.3 har *samme areal*. Har de tilsvarende massive rumlige områder også *samme rumfang*?

Bilag B

Frenet–Serret fra generel parametrisering

Som allerede antydnet i kapitel 8 kan det være en besværlig sag at finde en enhedsfart-parametrisering af en given kurve ud fra en given t –parametrisering af kurven. Heldigvis kan vi alligevel forholdsvis enkelt beregne Frenet–Serret tetraederet $\boxtimes(t) = \boxtimes(p(t), \mathbf{e}(t), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t))$, og krumningen $\kappa(t)$, og torsionen $\tau(t)$ i et vilkårligt punkt på kurven som funktioner af den givne (tids-)parameter t .

Sætning B.1. *En kurve med parameterfremstillingen $p(t)$ med stedvektorfunktion $\mathbf{p}(t)$ med $\mathbf{p}'(t) \neq \mathbf{0}$ for alle t har krumning, torsion, og Frenet–Serret vektorer givet ved følgende udtryk, hvor $v(t) = \|\mathbf{p}'(t)\| > 0$ betegner farten af den tilhørende bevægelse:*

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|}{v^3(t)} \\ \tau(t) &= \frac{(\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|^2} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \\ \mathbf{e}(t) &= \frac{\mathbf{p}'(t)}{v(t)} \\ \mathbf{g}(t) &= \frac{\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)}{\|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\|} \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \\ \mathbf{f}(t) &= \mathbf{g}(t) \times \mathbf{e}(t) \quad \text{når } \kappa(t) > 0 \quad .\end{aligned} \tag{B.1}$$

Bemærk, at $\mathbf{e}(t)$ og $\mathbf{g}(t)$ beregnes før $\mathbf{f}(t)$. Frenet–Serret vektorfunktionerne $\mathbf{e}(t)$, $\mathbf{f}(t)$, og $\mathbf{g}(t)$ tilfredsstiller følgende ligninger, hvor $\kappa(t)$ betegner kurvens krumning, og $\tau(t)$ betegner kurvens

torsion, og $v(t)$ farten af bevægelsen:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'(t) &= v(t)\kappa(t)\mathbf{f}(t) \\ \mathbf{f}'(t) &= -v(t)\kappa(t)\mathbf{e}(t) + v(t)\tau(t)\mathbf{g}(t) \\ \mathbf{g}'(t) &= -v(t)\tau(t)\mathbf{f}(t) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

OPGAVE B.2. Vis, at ovenstående udtryk reducerer til dem vi fandt og beviste i kapitel 8 når kurven er parametriseret med enhedsfart $v(t) = 1$ for alle t .

Eksempel B.3. Vi betragter den plane kurve, en parabel, der er givet som grafen for denne funktion: $y = x^2$ i (x, y) -planen. Kurven kan vi opfatte som en parametriseret rumkurve på følgende måde:

$$\mathcal{K} : \mathbf{p}(t) = (t, t^2, 0), \quad (\text{B.3})$$

hvoraf vi får følgende ingredienser til beregning Frenet-Serret elementerne for kurven:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'(t) &= (1, 2t, 0) \neq (0, 0, 0) \quad \text{for alle } t \\ v(t) &= \sqrt{1 + 4t^2} \\ \mathbf{p}''(t) &= (0, 2, 0) \\ \mathbf{p}'''(t) &= (0, 0, 0) \\ \mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t) &= (0, 0, 2) \\ \|\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)\| &= 2 \\ (\mathbf{p}'(t) \times \mathbf{p}''(t)) \cdot \mathbf{p}'''(t) &= 0 \\ \kappa(t) &= \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Eksempel B.4. Mere generelt, grafen for en funktion $y = f(x)$ i (x, y) -planen kan parametriseres:

$$\mathcal{K} : \mathbf{p}(t) = (t, f(t), 0), \quad (\text{B.5})$$

hvoraf for eksempel:

$$\begin{aligned} \kappa(t) &= \frac{|f''(t)|}{(1 + (f'(t))^2)^{3/2}} \\ \tau(t) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

OPGAVE B.5. En vindellinje er givet ved parameterfremstillingen:

$$\mathcal{K} : \mathbf{p}(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), \quad (\text{B.7})$$

hvor $a \neq 0$. Bestem direkte ved hjælp af B.1 krumningen, torsionen, og Frenet-Serret vektorfunktionerne for denne vindellinje. Sammenlign med resultatet fra opgave 8.26.

Bilag C

Rettelser og implementeringsdatoer

15.09.09 : $[q = (2.0, 0.5, 1.0)] \rightsquigarrow [q = (1.5, 0.0, 1.0)] :$

– I figur [3.2](#)

02.10.09 : $[K_2 = K K_1^{-1}] \rightsquigarrow [K_2 = K K_1] :$

– I ligning ([5.5](#))

02.10.09 : [(hængsel)] \rightsquigarrow [(treben)] :

– I opgave [5.9](#)

09.10.09 : $[K(t) = U(t) \Sigma(t) V(t)] \rightsquigarrow [K(t) = U(t) \Sigma(t) V^*(t)] :$

– Lige efter ligning ([6.9](#))

– Afsnittet over opgave [6.9](#)

– Figurteksten til figurerne [6.5](#) og [6.6](#)

09.10.09 : $[U(t) V(t)] \rightsquigarrow [U(t) V^*(t)] :$

– Figurteksten til figur [6.6](#)

– I afsnittet lige efter opgave [6.8](#)

23.10.09 : $[(-1, -1, 2)] \rightsquigarrow [(-1, -1, 1)] :$

– Opgave [7.15](#)

26.10.09 : $[\cos(u)] \rightsquigarrow [\cos(v)] :$

- Ligning (4.17), $\mathbf{R}_y(v)$, element r_{33} .

29.10.09 : $[p_1(s)] \rightsquigarrow [p'_1(s)]$ og tilsvarende for $p_2(s)$, også under kvadratrodstegnene :

- Ligning (8.11).

$$02.11.09 : \mathbf{R}(s) = \begin{bmatrix} -\sin(s/a) & -\cos(s/a) & 0 \\ \cos(s/a) & -\sin(s/a) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{R}'(s) = \begin{bmatrix} -\cos(s/a)/a & \sin(s/a)/a & 0 \\ -\sin(s/a)/a & -\cos(s/a)/a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} :$$

- Eksempel 8.19, ligning (8.23).

08.11.09 : $[\{Q, \tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \tilde{w}_3\}] \rightsquigarrow [\{Q, \xi, \eta, \zeta\}] :$

- Figur (9.1).

Litteratur

- [Po] H. Pottmann, A. Asperl, M. Hofer, and A. Kilian, *Architectural Geometry*, Bentley Institute Press, 2007.
- [Bj1] F. Fabricius Bjerre, *Geometri I: Analytisk Geometri, Lineær algebra*, Polyteknisk Forlag, 1981.
- [Bj2] F. Fabricius Bjerre, *Geometri II: Differentialgeometri, Kinematisk geometri*, Polyteknisk Forlag, 1981.
- [BP] W. Boehm and H. Prautzsch, *Geometric Concepts for Geometric Design*, A. K. Peters Ltd. 1994.
- [Br] K. Brakke, *The Surface Evolver*, <http://www.susqu.edu/brakke/>
- [BBI] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov, *A Course in Metric Geometry*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics **33** (2001).
- [GS] O. Gonzales and A. M. Stuart, *A First Course in Continuum Mechanics*, Cambridge University press, 2008.
- [H] S. Hadvig, *Termisk stråling for ingeniører I*, Danmarks Tekniske Højskole, 1980.
- [KCP] P. Klit, K. Casper, and N. L. Pedersen, *Machine Elements, Analysis and Design*, DTU Mechanical Engineering, 2007.
- [VLH] V. Lundsgaard Hansen, *Jeg er den største*, Normat 2, 1998, 71–75.
- [M] S. Markvorsen, *Integration i flere Variable*, Tekst og Maple pakke: <http://www.mat.dtu.dk/education/01005/MWS/INTEGRATOR7/>
- [Mac] MacTutor History of Mathematics, <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/>
- [Maple] Maple's hjemmeside <http://www.maplesoft.com/>
- [P] A. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, 2002.
- [Sal] D. Salomon, *Curves and Surfaces for Computer Graphics*, Springer, 2006.

- [St1] K. Stephenson, *Circle Packing: A Mathematical Tale*, Notices Amer. Math. Soc. 50, 11, 1376–1388 (2003), <http://www.ams.org/notices/200311/fea-stephenson.pdf>
- [St2] K. Stephenson, *Introduction to Circle Packing*, Cambridge University Press, 2005.
- [SSP] B. Springborn, P. Schröder, and U. Pinkall, *Conformal Equivalence of Triangular Meshes*, ACM Transactions on Graphics, Vol 27, No. 3, Article 77, August 2008.
- [S] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, 4. ed., Wellesley–Cambridge Press, 2009.
- [Sh] Aim@Shape Digital Shape WorkBench: <http://shapes.aimatshape.net/viewmodels.php>
- [MW] Eric Weisstein's Matematik Encyklopædi, <http://mathworld.wolfram.com/>

Indeks

- afledede af et matrix-produkt, 70
- Arealet, 117
- arealet, 11
- Arealet af en rumlig trekant, 30
- associerede akse-matrix, 72
- associerede akse-vektor, 72
- basistrekanten, 10
- basisvektorer, 8
- deformationsmatrix, 17
- deformere plane trekanter, 17
- dynamiske hængsel, 57
- ekstruderede objekter, 107
- energi, 26
- fabrik, 25
- flade i rummet, 117
- flipmatrix, 21
- fodpunkt, 9, 28
- Frenet–Serret treben, 86
- helix, 82
- hjørnepunkter, 10
- indre vinkel, 13
- Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_r(t, u, v)$, 114
- Jacobi-funktionen $\text{Jacobi}_s(u, v)$, 117
- kant-vektorer, 10
- kollapsede trekanter, 12
- koordinat-søjle-matricer, 9, 28
- koordinataksler, 8
- Koordinatsystemet i planen, 8
- Koordinatsystemet i rummet, 27
- krumningen af kurven, 87
- krydsproduktet, 29
- lineær afbildning, 20
- Længden af en kurve, 108
- markerede tetraedre, 49
- markerede trekanter, 49
- maskine, 19
- medfølgende hængsel, 59
- nyt koordinatsystem, 96
- omparametrisere, 82
- orienteringen, 11, 13
- Origo, 8
- pil, 9, 28
- pitch, 102
- plant område, 109
- polær dekomposition, 65
- pyramide, 115
- pyramider, 29
- reduceret skrue-højde, 102
- regulær parameterfremstilling, 117
- regulær trekant, 12
- regulært tetraeder, 32
- rumfang, 29
- Rumfanget af det parametriserede område, 113
- rumligt område, 113
- Singular Value Decomposition, 23
- skrue-akse, 102
- skrue-bevægelse, 102
- spidspunkt, 9, 28
- SVD, 23
- SVD af 3×3 –matricer, 40

tetraeder-rum, 99
Tetraedre, 28
tidsafhængig deformationsmatrix, 56
torsionen af kurven, 92
torus, 120
treben, 28
trekant i rummet, 29
Trekanter, 7
tværvektoren, 11

uforanderlig cirkelskive, 110

variabel cirkelskive, 110
variabel ellipse-skive, 112
vindellinje, 82
vinkelhastighed, 102
vinklerne, 11

øjeblikkelig drejning, 104
øjeblikkelig hvile, 101
øjeblikkelig parallelforskydning, 101
øjeblikkelig skruebevægelse, 104
øjeblikkelig translation, 101
øjeblikkelige hastighedsfelt, 100

INSTITUT FOR MATEMATIK, MATEMATIKTORVET, DTU
BYGNING 303 SYD, 2800 KGS. LYNGBY.

E-mail adresse: S.Markvorsen@mat.dtu.dk